



ACADÉMIE DE VERSAILLES

Lycée Blaise Pascal

Mathématiques supérieures et spéciales

Electronique Cours

ELECTRONIQUE

Sommaire

CHAPITRE I - LES DIPÔLES EN RÉGIME CONTINU	9
1 Les grandeurs fondamentales	9
1.1 Intensité d'un courant	9
1.2 Tension entre deux points.....	9
2 Les lois de Kirchhoff.....	10
2.1 Loi des nœuds.....	10
2.2 Loi des mailles	10
3 Notion de dipôle	11
3.1 Définition	11
3.2 Convention récepteur, convention générateur.....	11
3.3 Puissance	11
3.4 Caractéristique	12
3.5 Résistance statique et résistance dynamique.....	12
4 Quelques exemples de dipôles.....	13
4.1 Le conducteur ohmique.....	13
4.2 Les diodes.....	14
4.3 Ampoule à filament	15
4.4 Générateurs chimiques	15
5 Association de dipôles.....	17
5.1 Association série.....	17
5.2 Association parallèle.....	18
5.3 Le point de fonctionnement	19
6 Dipôles idéalisés.....	19
6.1 Dipôles linéarisés.....	19
6.2 Diodes idéales.....	20
CHAPITRE II - APPAREILS DE MESURES ÉLECTRIQUES.....	21
1 Résistance d'un ampèremètre	21
Résistance d'un voltmètre	21
3 Incertitudes de mesures	21
3.1 Appareil magnétoélectrique à aiguille.....	21
3.2 Appareils électroniques à affichage numérique.....	21
4 Sens du courant et de la tension mesurés.....	22
4.1 Ampèremètre.....	22
4.2 Voltmètre.....	22
CHAPITRE III - LES RÉSEAUX LINÉAIRES EN RÉGIME CONTINU	23
1 Réseau dipolaire linéaire	23
1.1 Association de dipôles linéaires.....	23
1.2 Les deux modèles de dipôles linéaires	23
1.3 Notion de générateur éteint.....	24
1.4 Théorèmes de Norton et Thévenin.....	25
2 Résolution d'un réseau	25
2.1 Etude du cas général.....	25
2.2 Théorème de superposition des régimes continus.....	26
2.3 Les diviseurs de tension et de courant	27
2.4 Loi des nœuds en terme de potentiel (ou théorème de Millmann).....	27
3 Les générateurs liés	28
3.1 Définition	28
3.2 Application des théorèmes de Thévenin et Norton.....	29
CHAPITRE IV - DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME VARIABLE.....	30
1 Approximation des régimes quasi stationnaire.....	30
2 Relation tension – courant	30
2.1 Condensateur	30
2.2 Bobine	31
3 Réseau linéaire	31
4 Régime transitoire et régime forcé	32

4.1	Equation du premier ordre.....	32
4.2	Equation du second ordre.....	33
CHAPITRE V - REPONSE D'UN DIPOLE A UN ECHELON DE TENSION : REGIME TRANSITOIRE ET REGIME PERMANENT		35
1	Dipôle RC	35
1.1	Equation différentielle.....	35
1.2	Régime transitoire	35
1.3	Régime forcé : échelon de 0 à E, échelon de E à 0.....	36
1.4	Bilan énergétique.....	38
2	Dipôle RL	38
2.1	Equation différentielle.....	38
2.2	Régime transitoire	39
2.3	Echelon de 0 à E, échelon de E à 0	39
3	Dipôle LC	41
3.1	Equation différentielle.....	41
3.2	« Régime transitoire »	41
3.3	Echelon de 0 à E.....	42
4	Dipôle RLC.....	43
4.1	Equation différentielle.....	43
4.2	Régime transitoire	43
4.3	Echelon de 0 à E.....	44
4.4	Régime pseudo-périodique	45
4.5	Définition du décrement logarithmique.....	46
CHAPITRE VI - RÉSEAUX LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ		48
1	Définitions	48
1.1	Régime sinusoïdal forcé.....	48
1.2	Amplitude, déphasage et valeur efficace	49
2	Résolution d'un réseau en régime sinusoïdal forcé.....	49
	Représentation de Fresnel.....	49
2.2	Représentation complexe.....	51
3	Impédance et admittance complexe	52
3.1	Définitions	52
3.2	Dipôles de base.....	53
3.3	Associations de dipôles.....	54
4	Lois des réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé	54
4.1	Théorème de superposition.....	54
4.2	Théorème de Thévenin et Norton.....	54
4.3	Diviseur de tension et de courant	55
4.4	Lois des nœuds en terme de potentiel	56
4.5	Théorème de Kennely	56
4.6	Exemple : Pont de type wheastone	57
5	Intérêts de l'étude du régime sinusoïdal forcé	57
5.1	Recherche de l'équation différentielle vérifiée par une intensité ou une tension	57
5.2	Etude de régimes forcés périodiques non sinusoïdaux	58
CHAPITRE VII - QUADRIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ.....		60
1	Définitions	60
1.1	Quadripôle.....	60
1.2	Impédance d'entrée, impédance de sortie	60
1.3	Fonction de transfert	60
1.4	Gain, phase et diagramme de Bode.....	61
1.5	Fréquence de coupure	62
1.6	Ordre d'un filtre	62
2	Filtre du premier ordre	62
2.1	Passe-bas d'ordre 1.....	62
2.2	Passe-haut d'ordre 1	64
3	Filtre du deuxième ordre	65
3.1	Passe-bande d'ordre 2.....	65

3.2	Passe-bas d'ordre 2	68
3.3	Passe-haut d'ordre 2	70
3.4	Filtre réjecteur de fréquence	72
4	Quelques remarques sur les diagrammes de Bode	73
CHAPITRE VIII - L'AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL		75
1	Caractéristiques	75
1.1	Description	75
1.2	Impédance d'entrée et de sortie	75
1.3	Fonction de transfert	75
1.4	Amplificateur opérationnel idéal	76
2	Régime saturé	77
2.1	Comparateur	77
2.2	Suiveur	77
3	Montages linéaires : les montages de base	78
3.1	Amplificateur non inverseur	78
3.2	Amplificateur inverseur	79
3.3	Additionneur	79
3.4	Dérivateur	80
3.5	Intégrateur	80
4	Stabilité du régime linéaire	81
4.1	Rétroaction sur E^-	81
4.2	Rétroaction sur E^+	83
4.3	Oscillateur à pont de Wien	84
CHAPITRE IX - CIRCUITS NON LINÉAIRES		86
1	Analyse spectrale d'un signal périodique	86
2	Redressement et filtrage	87
2.1	Redressement simple alternance	87
2.2	Redressement double alternance	88
2.3	Détecteur de crête	89
2.4	Filtrage et détecteur de crête	89
3	Régulation d'une tension par diode Zener	91
4	L'amplificateur opérationnel en régime saturé	91
4.1	Comparateur	91
4.2	Comparateur à hystérésis	91
CHAPITRE X - PUISSANCE EN RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ		95
1	Puissance instantanée	95
1.1	Expression générale	95
1.2	Régime sinusoïdal forcé	95
2	Puissance moyenne	95
2.1	Définition	95
2.2	Régime sinusoïdal forcé	96
2.3	Dipôle passif linéaire	96
2.4	Dipôle RLC série	97
3	Facteur de puissance	97
3.1	Importance dans la distribution industrielle	97
3.2	Amélioration du facteur de puissance	98
4	Adaptation d'impédance	98

Chapitre I Les dipôles en régime continu

1 Les grandeurs fondamentales

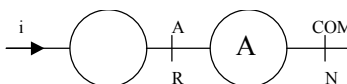
1.1 Intensité d'un courant

Un courant électrique est dû à un déplacement de charges électriques assuré par des porteurs de charges (électrons, cations, anions). Si les porteurs sont chargés positivement, le courant est dans le sens de leur mouvement ; si les porteurs sont chargés négativement, il est en sens inverse.

L'intensité d'un courant dans un conducteur est la quantité d'électricité traversant, par unité de temps, une section de conducteur. En régime continu, dans un conducteur sans dérivation, l'intensité du courant est la même, quelle que soit la section du conducteur considéré.

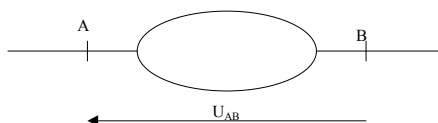
Le conducteur est de plus orienté et l'intensité est définie **algébriquement** : si le courant est dans le sens de la flèche, $i > 0$; s'il est dans le sens inverse, $i < 0$

Une intensité se mesure en Ampère (A, mA, μ A, ...) à l'aide d'un ampèremètre placé **en série** avec le conducteur dans lequel on veut mesurer l'intensité du courant.



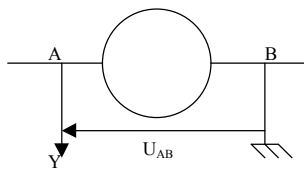
1.2 Tension entre deux points

La tension ou différence de potentiel entre deux points A et B d'un circuit est elle aussi une grandeur **algébrique** : $U_{AB} = V_A - V_B$. Sur le schéma électrique, elle se représente par une flèche orientée de B vers A

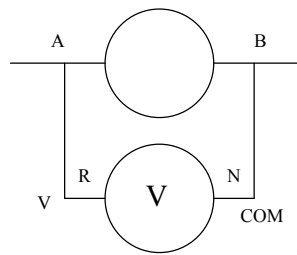


Une tension se mesure en Volt (V, mV, ...) avec un oscilloscope ou un voltmètre placé **en dérivation** sur les points A et B

Oscilloscope



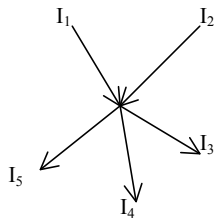
Voltmètre



2 Les lois de Kirchhoff

2.1 Loi des nœuds

C'est une conséquence de la conservation de la charge électrique : en régime continu, la somme **algébrique** des intensités des courants **arrivants** à un nœud est nulle.



$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$$

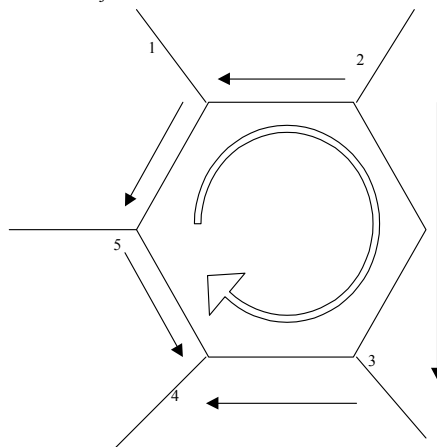
$$\sum_{j=1}^5 \varepsilon_j \cdot I_j = 0 \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \varepsilon_j = +1 \text{ si } I_j \text{ est orienté vers le nœud} \\ \varepsilon_j = -1 \text{ si } I_j \text{ est orienté vers l'extérieur} \end{array}$$

2.2 Loi des mailles

La tension est une différence de potentiel : $(V_A - V_B) + (V_B - V_C) = V_A - V_C$

Le long d'une maille orientée, la somme algébrique des tensions est nulle

$$\sum_{j=1}^5 \varepsilon_j \cdot u_{jk} = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \varepsilon_j = +1 \text{ si } u_{jk} \text{ est orienté dans le sens de la maille} \\ \varepsilon_j = -1 \text{ si } u_{jk} \text{ est orienté en sens inverse de la maille} \end{array}$$



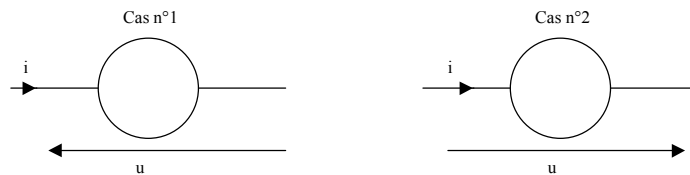
3 Notion de dipôle

3.1 Définition

On appelle dipôle un ensemble électrique possédant deux bornes (ou pôles). On peut étendre cette définition à l'ensemble d'un réseau électrique « vu » entre deux points et appelé réseau dipolaire ou dipôle.

3.2 Convention récepteur, convention générateur

Pour définir l'intensité dans un dipôle et la tension à ses bornes, il faut orienter ces deux grandeurs. On peut choisir :



Cas n°1 : si $i > 0$ et $u > 0$, le courant traverse le dipôle dans le sens des potentiels décroissants (de même si $i < 0$ et $u < 0$). Le dipôle est un récepteur.

Si u et i sont de signes opposés, le courant traverse le dipôle dans le sens des potentiels croissants ; c'est un générateur.

Cas n°2 : si $i > 0$ et $u > 0$, le courant traverse le dipôle dans le sens des potentiels croissants (de même si $i < 0$ et $u < 0$). Le dipôle est un générateur.

Si i et u sont de signes opposés, le courant traverse le dipôle dans le sens des potentiels décroissants ; c'est un récepteur.

Celui qui ne voudrait travailler qu'avec des nombres positifs devrait donc choisir l'orientation 1 pour des récepteurs et la 2 pour des générateurs, d'où les noms de convention récepteur (cas 1) et convention générateur (cas 2).

Sauf avis contraire, nous utiliserons toujours la convention récepteur où les flèches représentants u et i sont de sens contraire.

3.3 Puissance

La puissance **reçue** par un dipôle a pour valeur absolue $|P| = |u| \cdot |i|$.

Si ce dipôle est un récepteur, $P > 0$. Or dans la convention 1 utilisée, si le dipôle est un récepteur, u et i sont de même signe donc $P = u \cdot i$ en valeur algébrique.

Si le dipôle est un générateur, la puissance P qu'il reçoit est négative. Or, toujours dans la convention 1, si le dipôle est un générateur, u et i sont de signes opposés et $P = u \cdot i$.

En choisissant la convention récepteur, que le dipôle soit un générateur ou un récepteur, on pourra toujours écrire que la puissance reçue par le dipôle est : $P = u \cdot i$.

3.4 Caractéristique

Pour un dipôle donné, u est fonction de i et réciproquement : $u = f(i)$ et $i = g(u)$.

La caractéristique d'un dipôle est la courbe donnant u en fonction de i ou réciproquement.

Elle peut être tracée point par point à l'aide d'un ampèremètre, d'un voltmètre et d'un générateur continu réglable (montage longue ou courte dérivation). On obtient alors la caractéristique **statique** du dipôle.

Elle peut être tracée à l'écran à l'aide d'un oscillographe, d'un générateur basses fréquences et d'une résistance (voir TP). On obtient alors la caractéristique **dynamique** du dipôle.

Le fonctionnement d'un dipôle est toujours limité en intensité, en tension ou en puissance pour éviter sa détérioration. Il faut donc limiter la caractéristique.

Dipôle **passif** : la caractéristique du dipôle passe par l'origine.

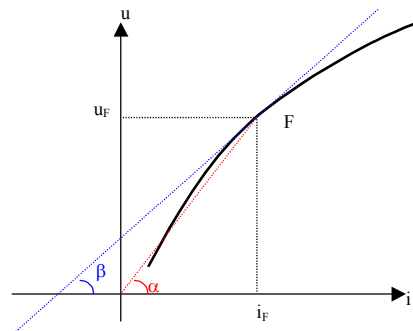
Dipôle **actif** : la caractéristique du dipôle ne passe pas par l'origine.

Dipôle **symétrique** : la caractéristique du dipôle possède l'origine pour centre de symétrie

Dipôle **linéaire** : la caractéristique du dipôle est une droite.

3.5 Résistance statique et résistance dynamique

Soit un dipôle fonctionnant en continu au point F (u_F , i_F) de sa caractéristique.



Sa **résistance statique** est définie par :

En F, la résistance statique du dipôle est

$$u_F = R_S \cdot i_F \quad (\text{Représentation : } \tan \alpha)$$

Et sa **résistance dynamique** par :

En F, la résistance dynamique du dipôle est

$$R_D = \left(\frac{du}{di} \right)_F \quad (\text{Représentation : } \tan \beta)$$

R_S et R_D ont même dimension et se mesurent en ohms (Ω , $k\Omega$, ...)

R_S et R_D dépendent en général du point de fonctionnement et sont généralement différentes.

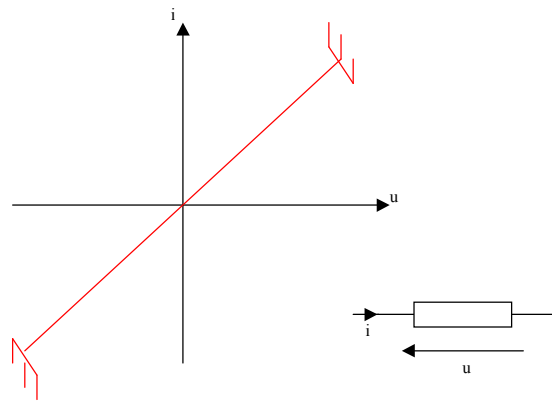
Pour la quasi-totalité des dipôles, qu'ils soient récepteurs ou générateurs, s'ils sont orientés en convention récepteur, u est une fonction croissante de i et la résistance dynamique est positive.

Dans quelques cas très particuliers, u est fonction décroissante de i ; le dipôle est dit à résistance négative.

4 Quelques exemples de dipôles

4.1 Le conducteur ohmique

C'est un dipôle dont la caractéristique est une droite passant par l'origine. Il est donc passif, symétrique et linéaire. Sa résistance statique et sa résistance dynamique sont indépendantes du point de fonctionnement et égales entre elles. C'est la résistance R du conducteur ohmique.



L'équation caractéristique s'écrit :

$$u = Ri, R = R_D = R_S = Cte \quad \text{caractéristique du conducteur ohmique}$$

$$i = Gu \quad \text{où } G = 1/R \quad (G \text{ est la conductance en Siemens, noté } S)$$

G est la conductance du conducteur ohmique. G se mesure en Siemens ($S = \Omega^{-1}$)

Un conducteur ohmique est souvent appelé, par abus de langage, résistance.

Un conducteur métallique homogène et cylindrique est un exemple de conducteur ohmique. Sa résistance est donnée par

$$R = \rho \cdot \frac{L}{S}$$

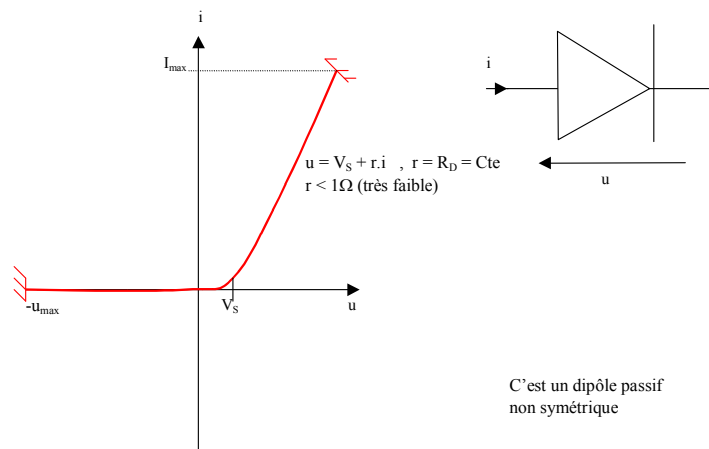
où L est la longueur du cylindre, S sa section droite et ρ un coefficient de proportionnalité caractéristique du métal et appelé résistivité.

L'équation en dimension de ρ est : $[\rho] = [R]L$.

ρ se mesure en $\Omega \cdot m$ et est de l'ordre de $10^{-8} \Omega \cdot m$ pour les métaux purs ($10^{-6} \Omega \cdot m$ pour un alliage)

4.2 Les diodes

4.2.1 La diode à jonction



V_s : tension de seuil $V_s \approx 0,6V$

Si $u < V_s$ alors $i = 0$ et la diode est dite bloquée

Si $u > V_s$ alors $i > 0$, $u = V_s + r \cdot i$, la diode est dite passante

r est la résistance (dynamique) de la diode utilisée dans le sens passant
 r est inférieur à l'ohm

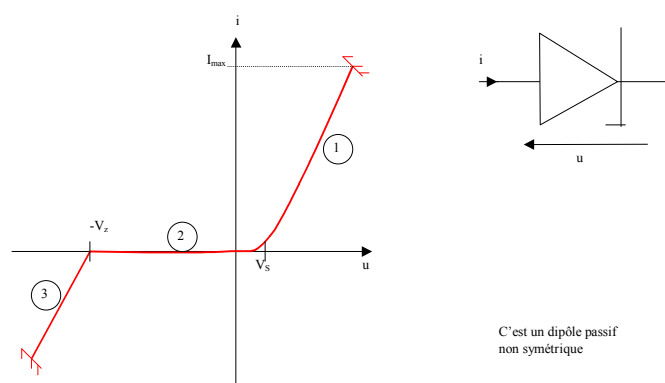
Limitation de fonctionnement :

En intensité dans le sens passant : $i < i_{max}$

En tension dans le sens bloquant : $u > -u_{max}$

u_{max} est appelée la tension de claquage.

4.2.2 La diode zéner



V_s : tension de seuil $V_s \approx 0,6V$

V_z : tension zener V_z est typiquement de l'ordre de 3 à 50 V

Zone 1 :

Si $u > V_s$ alors $i > 0$ et $u = V_s + r_1 \cdot i$ passante en directe

Zone 2 :

Si $-V_Z < u < V_S$ alors $i = 0$

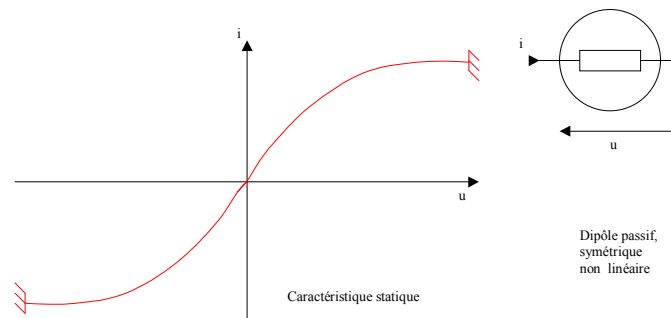
Zone 3 :

Si $u < -V_Z$ alors $i < 0$ et $u = -V_Z + r_2 \cdot i$ passante en inverse

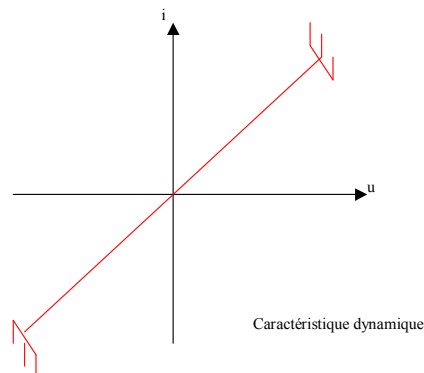
r_1 et r_2 sont de l'ordre de l'ohm (ou moins)

Une diode zener est généralement utilisée en inverse comme stabilisateur de tension.

4.3 *Ampoule à filament*



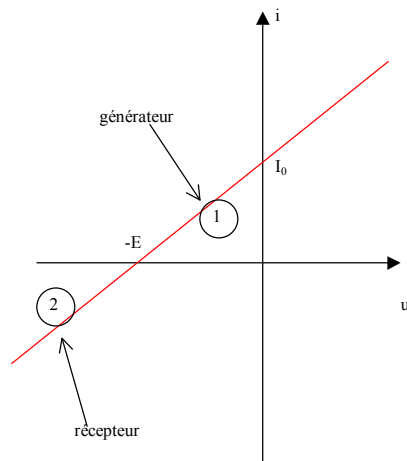
Plus u est grand, plus la température d'équilibre du filament est grande et plus la résistance est grande.



Le filament a une température d'équilibre constante. Sa résistance est constante.

4.4 *Générateurs chimiques*

Ce sont les piles et les accumulateurs



E : tension à vide ou force électromotrice (fem) du générateur

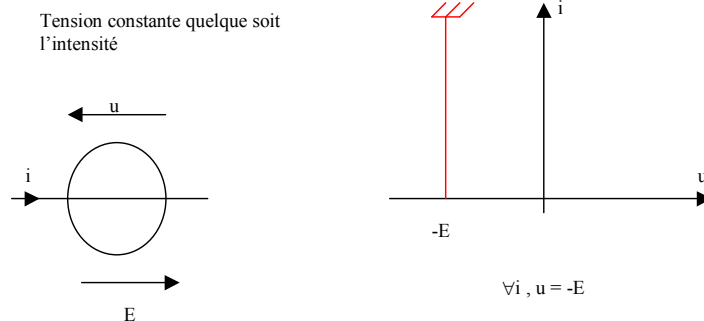
I_0 : Courant de court-circuit ou courant électromoteur (cem) (problème si $i = I_0$)

$r = \frac{E}{I_0}$: résistance interne (= résistance dynamique)

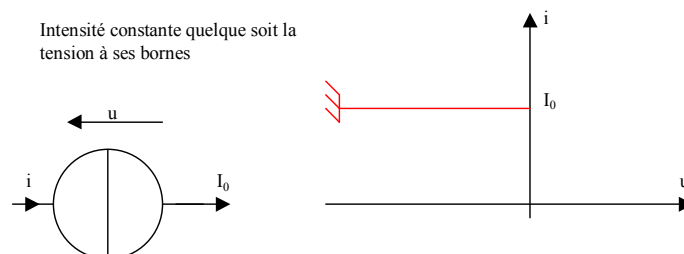
zone 1 : le dipôle fonctionne en générateur

zone 2 : le dipôle fonctionne en récepteur

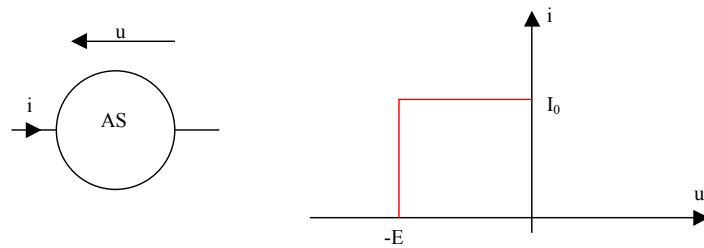
4.4.1 Générateur de tension



4.4.2 Générateur d'intensité



4.4.3 Alimentation stabilisée



Si $0 < i < I_0$, $u = -E$; c'est un générateur de tension

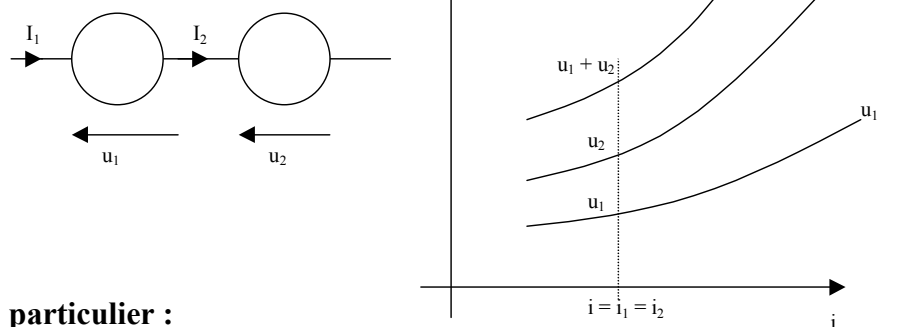
Si $0 > u > -E$, $i = I_0$; c'est un générateur de courant

5 Association de dipôles

5.1 Association série

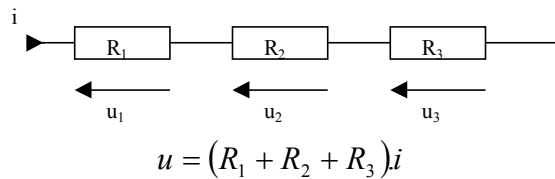
$$U = U_1 + U_2$$

$$I = I_1 = I_2$$



Cas particulier :

Association de conducteurs ohmiques :

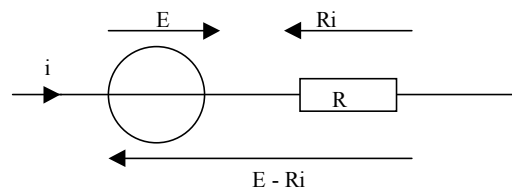


Ceci est l'équation d'une droite passant par l'origine.

Ceci est donc un conducteur ohmique de résistance équivalente

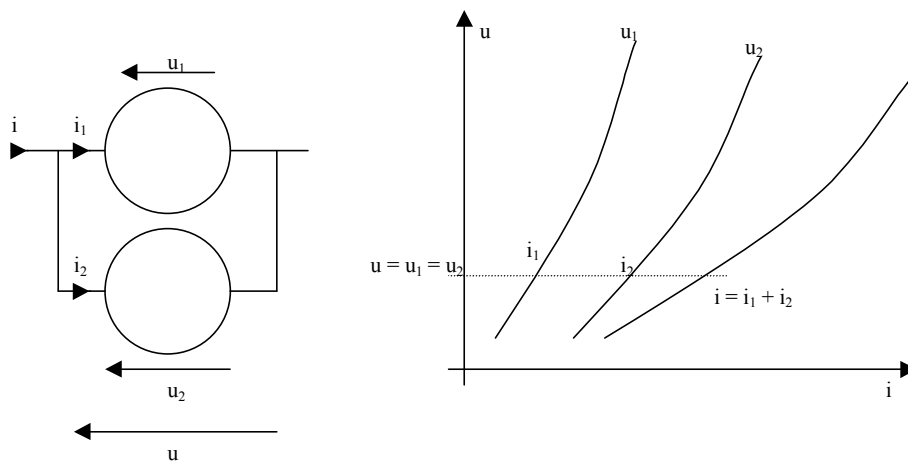
$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

Association d'un générateur de tension et d'un conducteur ohmique



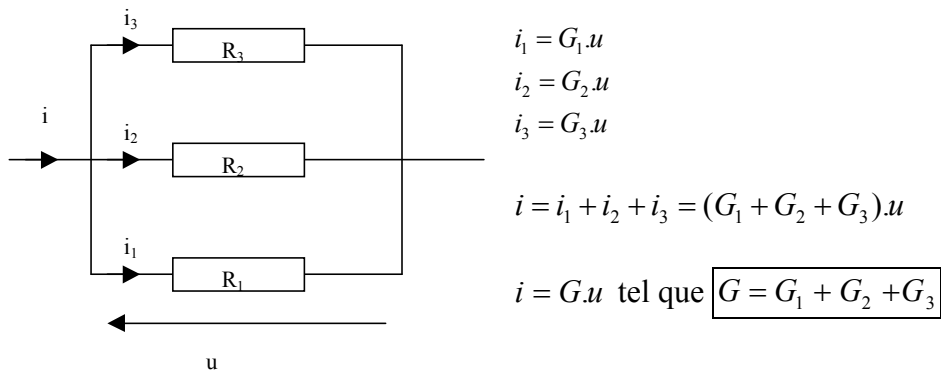
Ceci est équivalent à un générateur de fem E et de résistance interne R

5.2 Association parallèle



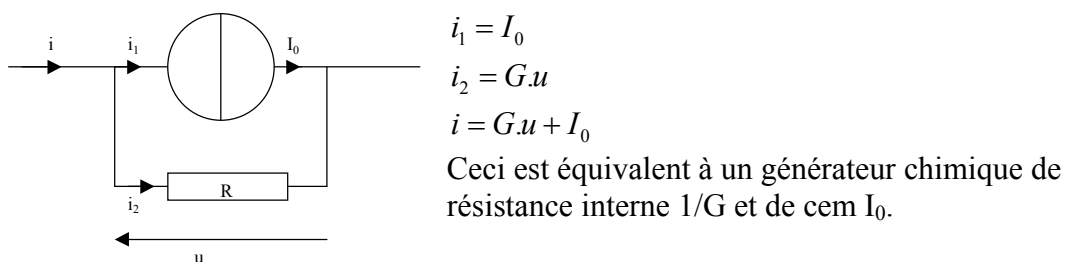
Cas particulier :

Association de conducteurs ohmiques

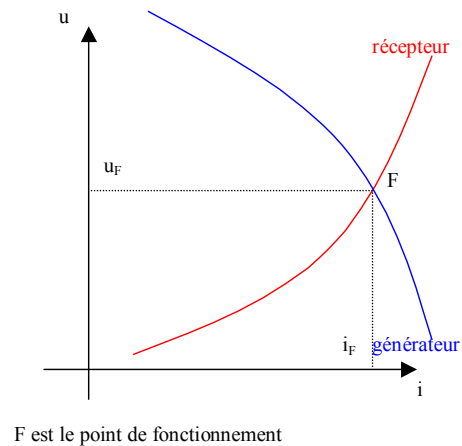
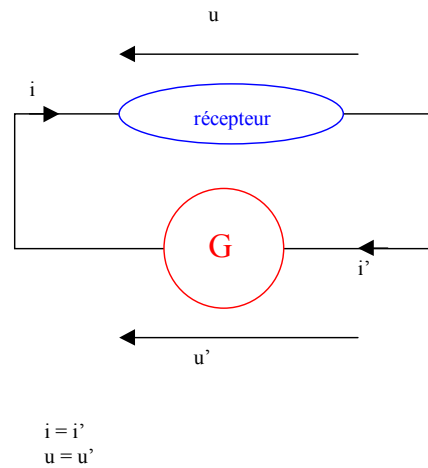


Pour deux conducteurs ohmiques, $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$, donc $\boxed{R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}$

Association d'un générateur de courant et d'un conducteur ohmique

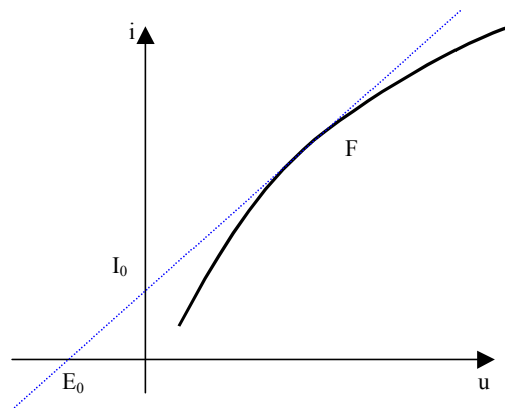


5.3 Le point de fonctionnement



6 Dipôles idéalisés

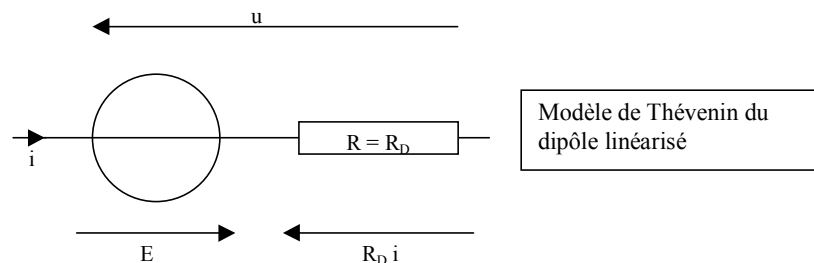
6.1 Dipôles linéarisés



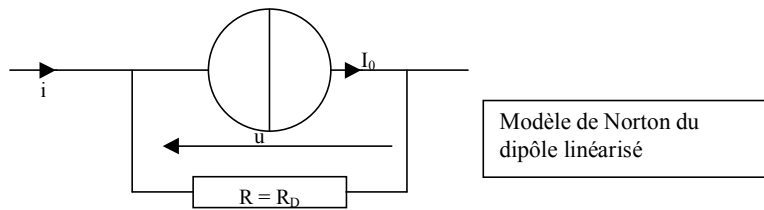
On a la possibilité de confondre la caractéristique et la tangente au voisinage du point F de fonctionnement. Le dipôle est alors linéaire, sa droite caractéristique est celle d'un générateur chimique.

Si le dipôle non linéaire fonctionne au voisinage d'un point de fonctionnement, on peut remplacer sa caractéristique par la tangente en F.

C'est une droite dont la pente est la résistance dynamique (ou l'inverse) R_D . C'est la caractéristique d'un générateur de tension en série avec un conducteur ohmique de résistance R_D .

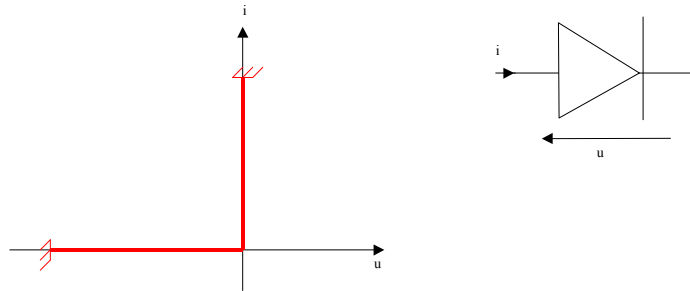


C'est aussi la caractéristique d'un générateur de courant en dérivation avec un conducteur ohmique de résistance R_D .



6.2 Diodes idéales

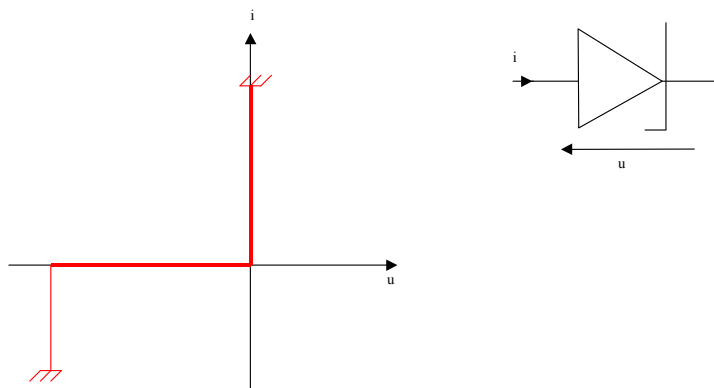
Diodes à jonction idéales : On suppose $V_S = 0$ et $r = 0$



La caractéristique présente deux parties linéaires :

$u < 0$ et $i = 0$ $i > 0$ et $u = 0$

Diode zener idéale : on suppose $V_S = 0$ et $r_1 = r_2 = 0$ ($V_Z \neq 0$)



La caractéristique se décompose en trois parties :

$i > 0$ et $u = 0$ $-V_Z < u < 0$ et $i = 0$ $i < 0$ et $u = -V_Z$

Chapitre II Appareils de mesures électriques

1 Résistance d'un ampèremètre

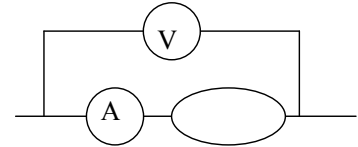
La résistance R_a d'un ampèremètre est petite mais non nulle. La tension u_a à ses bornes est donc petite mais non nulle. La tension u affichée par le voltmètre n'est pas égale à la tension u_0 aux bornes du dipôle : $u_0 = u - u_a$.

Or $u_a = R_a i$, i étant l'intensité qui traverse l'ampèremètre, lue sur l'ampèremètre lui-même

R_a dépend du calibre utilisé. Pour connaître sa valeur, le constructeur précise la chute de tension maximale $u_{a\max}$ aux bornes de l'ampèremètre (indépendante du

calibre), valeur de u_a si $i = \text{calibre}$. On en déduit donc $R_a = \frac{u_{a\max}}{\text{calibre}}$.

Figure 1 : montage « longue dérivation »



2 Résistance d'un voltmètre

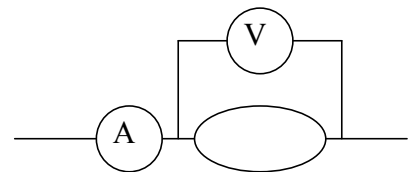
La résistance R_V d'un voltmètre est très grande mais non infinie.

L'intensité i_V qui le traverse est donc petite mais non nulle. L'intensité i affichée par l'ampèremètre n'est pas égale à l'intensité i_0 qui traverse le dipôle : $i_0 = i - i_V$.

Or $i_V = u / R_V$, u étant la tension aux bornes du voltmètre, lue sur le voltmètre lui-même.

R_V dépend du calibre utilisé. Pour connaître sa valeur, le constructeur précise en général la valeur $X = \frac{R_V}{\text{calibre}}$ (indépendante du calibre). Connaissant X et le calibre, on en déduit R_V , puis i_V et i_0 . On en déduit donc $R_V = X \cdot \text{calibre}$.

Figure 2 : montage « courte dérivation »



3 Incertitudes de mesures

3.1 Appareil magnétoélectrique à aiguille

L'incertitude absolue Δx sur la valeur x mesurée (intensité, tension, résistance, ...) est donnée par la classe de l'appareil, inscrite en général en bas du cadran :

$$\Delta x = \frac{\text{classe} \cdot \text{calibre}}{100}$$

3.2 Appareils électroniques à affichage numérique

L'incertitude absolue Δx sur la valeur x mesurée (intensité, tension, résistance, ...) est égale à la somme de deux termes :

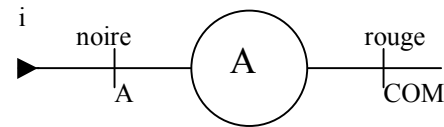
- $\pm n$ unités (ou digits) sur le dernier chiffre affiché (terme lié à l'affichage lui-même)

- Un terme, généralement évalué en pourcentage de la valeur mesurée, lié à la qualité du circuit électronique de l'appareil.
- Le tout est indiqué sur l'appareil ou sur la notice qui l'accompagne.

4 Sens du courant et de la tension mesurés

4.1 Ampèremètre

L'une des bornes de l'ampèremètre est rouge (ou notée A). L'autre est noire (ou notée COM).
L'ampèremètre mesure le courant i orienté positivement de A (rouge) vers COM (noire) à travers lui-même.



S'il est numérique ou à zéro central, il donne le signe de i .

S'il est à aiguille et à zéro à gauche, il ne peut mesurer qu'un courant $i > 0$.

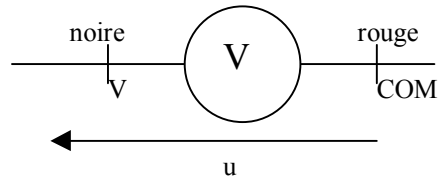
4.2 Voltmètre

L'une des bornes du voltmètre est rouge (notée V)
L'autre est noire (ou notée COM)

Le voltmètre mesure la tension $u = V_{\text{rouge}(V)} - V_{\text{noire}(COM)}$.

S'il est numérique ou à zéro central, il donne le signe de u .

S'il est à aiguille et à zéro à gauche, il ne peut mesurer qu'une tension $u > 0$.



Chapitre III Les réseaux linéaires en régime continu

Ce chapitre étudie les réseaux ne comportant que des dipôles linéaires (ou linéarisés) en régime continu

1 Réseau dipolaire linéaire

1.1 Association de dipôles linéaires

Dans un réseau dipolaire, les dipôles sont associés en série, en parallèle ou en groupes mixtes.

La caractéristique de deux dipôles linéaires montés en série est une droite

La caractéristique de deux dipôles linéaires montés en parallèle est aussi une droite

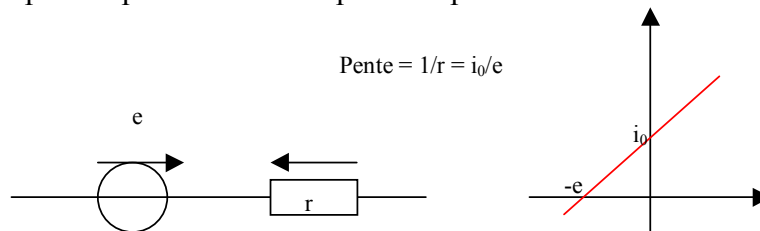
La caractéristique d'un réseau dipolaire ne comportant que des dipôles linéaires est donc une droite

Un réseau dipolaire formé de dipôles linéaires est équivalent à un dipôle linéaire.

Le coefficient directeur de la caractéristique du dipôle équivalent ne dépend que des coefficients directeurs (g_i ou r_i) des caractéristiques des différents dipôles et de la géométrie de l'association (série, parallèle, ...)

1.2 Les deux modèles de dipôles linéaires

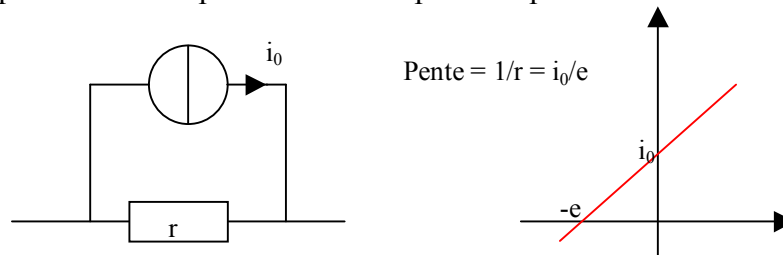
Un réseau dipolaire peut donc être représenté par son modèle de Thévenin :



e est donc la tension (attention au sens !) aux bornes du dipôle lorsque $i = 0$.

Pour connaître e , il suffit de calculer ou de mesurer cette tension lorsque le dipôle est "à vide" ($\Leftrightarrow$ "en circuit ouvert" $\Leftrightarrow$ "sans charge" $\Leftrightarrow$ " $i = 0$ ").

Un réseau dipolaire linéaire peut aussi être représenté par son modèle de Norton :



i_0 est donc le courant (attention au sens !) circulant dans le circuit extérieur au dipôle si $u = 0$

Pour connaître i_0 , il suffit donc de calculer ou de mesurer i lorsque le dipôle est "court-circuité", c'est à dire fermé sur une résistance nulle.

1.3

Notion de générateur éteint

Pour connaître la résistance r (ou la conductance g) du modèle de Norton ou de

Thévenin, on peut déterminer e et i_0 et calculer $r = \frac{1}{g} = \frac{e}{i_0}$

Mais il existe une autre méthode :

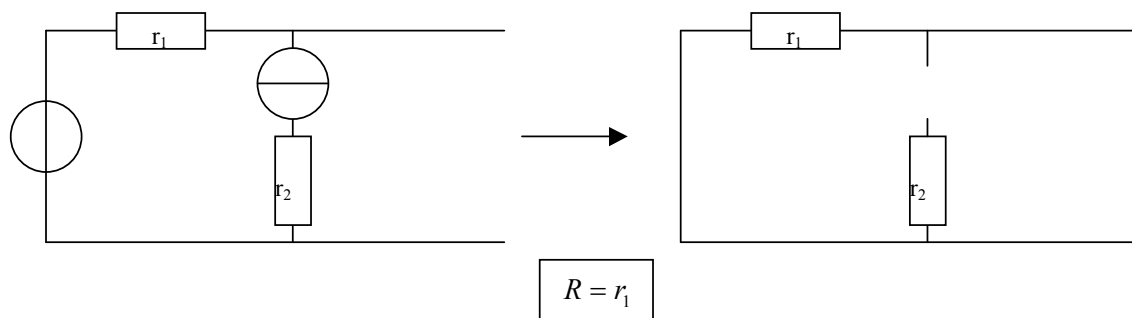
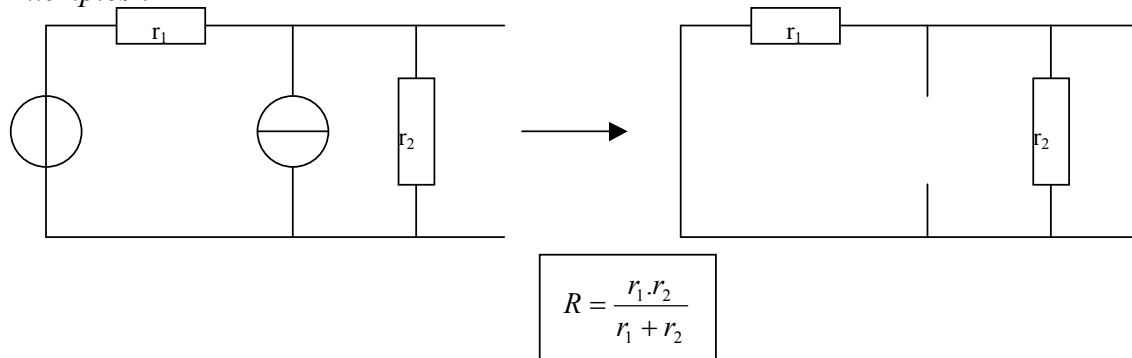
La pente de la caractéristique du réseau dipolaire ne dépend que des pentes des caractéristiques de chacun des dipôles du réseau et de sa géométrie mais elle ne dépend pas de l'ordonnée à l'origine i_0 ou de l'abscisse à l'origine $-e$. On peut en particulier les annuler, c'est à dire éteindre les générateurs de tension et de courant.

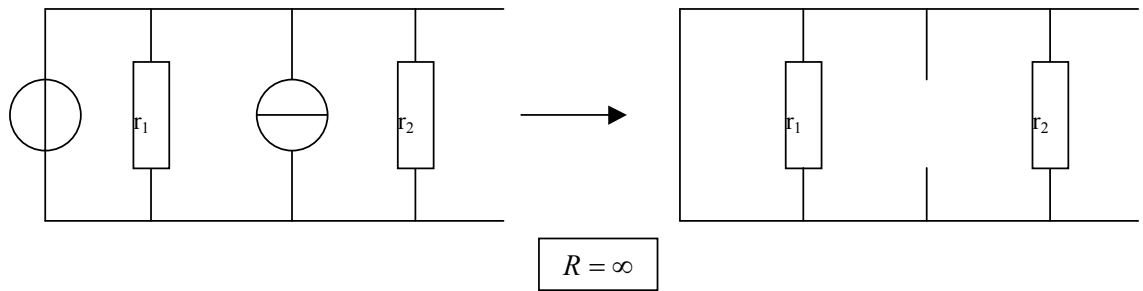
Eteindre un générateur de Thévenin, c'est annuler la source de tension ($e = 0$) sans changer sa résistance : la source de tension doit être remplacée par un « fil » de résistance nulle.

Eteindre un générateur de Norton, c'est annuler la source de courant ($i_0 = 0$) sans changer sa résistance ; la source de courant doit être remplacée par un « vide » de résistance infinie.

La résistance d'un réseau dipolaire linéaire n'est pas modifiée lorsqu'on éteint les générateurs.

Exemples :





1.4 Théorèmes de Norton et Thévenin

Pour le circuit extérieur auquel il est relié, un réseau dipolaire linéaire peut être remplacé par :

- Son modèle de Thévenin, c'est à dire une source de tension e égale à la tension à vide aux bornes du dipôle, en série avec une résistance r égale à la résistance équivalente au réseau dipolaire dont on a éteint tous les générateurs.
- Son modèle de Norton, c'est à dire une source de courant i_0 égale au courant de court-circuit du dipôle, en dérivation avec une résistance r égale à la résistance équivalente au réseau dipolaire dont on a éteint tous les générateurs.

Les résistances des modèles de Thévenin et Norton sont identiques et égales à $\frac{e}{i_0}$

2 Résolution d'un réseau

2.1 Etude du cas général

On cherche les intensités des courants dans les diverses branches du réseau dipolaire linéaire.

Chaque branche est remplacée par son modèle de Thévenin. On connaît donc les fem $\{e_j\}$ des sources de tension et les résistances internes $\{r_j\}$ de chacun. Il suffit alors d'écrire :

- Les lois des nœuds à chaque nœud : $\sum_j \varepsilon_j i_j = 0$
- Les lois des mailles pour chaque maille : $\sum_j \varepsilon_j (-e_j + r_j i_j) = 0$

On obtient **un système d'équations linéaires**.

Mathématiquement, un tel système n'a pas obligatoirement une et une seule solution. Mais ce système décrit un réseau qui existe. La solution **existe** et l'expérience montre qu'elle est **unique**. Nous ne nous préoccupons donc pas de l'existence et l'unicité de la solution (bien que ces propriétés puissent être démontrées).

Si on recherche les tensions aux bornes des diverses branches d'un réseau dipolaire linéaire, on remplace chaque branche par son modèle de Norton. On connaît donc les cem $\{i_{0k}\}$ des sources de courant et les conductances internes $\{g_k\}$ de chacun. Il suffit alors d'écrire :

- Les lois des nœuds à chaque nœud : $\sum_k \varepsilon_k (i_{0k} + g_k u_k) = 0$

- Les lois des mailles pour chaque maille : $\sum_k \mathcal{E}_k . u_k = 0$

On obtient **un système d'équations linéaires** dont la solution existe et est unique.

Il ne reste plus qu'à résoudre l'un des deux systèmes pour obtenir les intensités ou les tensions du réseau. Cette méthode est très « lourde » mais peut toujours conduire au résultat. Elle se programme facilement et se prête bien au calcul sur machine.

Mais il existe des théorèmes qui permettent d'alléger les calculs. Leurs démonstrations, hors programme, reposent toutes sur la linéarité des équations liant intensités et tensions.

2.2 Théorème de superposition des régimes continus

Soit un réseau linéaire caractérisé par :

- une structure géométrique
- des valeurs de résistances $\{r\}$
- des sources de tensions $\{e\}_1$
- des sources de courants $\{i_0\}_1$

Les intensités dans les branches sont alors $\{i\}_1$ et les tensions à leurs bornes $\{u\}_1$

Considérons le réseau linéaire caractérisé par :

- La même structure géométrique
- les mêmes valeurs de résistances $\{r\}$
- des sources de tensions $\{e\}_2$
- des sources de courants $\{i_0\}_2$

Les intensités dans les branches sont alors $\{i\}_2$ et les tensions à leurs bornes $\{u\}_2$

Considérons maintenant le réseau linéaire caractérisé par :

- la même structure géométrique
- les mêmes valeurs de résistances $\{r\}$
- des sources de tension $\{e\}_3 = \lambda . \{e\}_1 + \mu . \{e\}_2$
- des sources de courant $\{i_0\}_3 = \lambda . \{i_0\}_1 + \mu . \{i_0\}_2$

Les intensités dans les branches sont alors $\{i\}_3 = \lambda . \{i\}_1 + \mu . \{i\}_2$

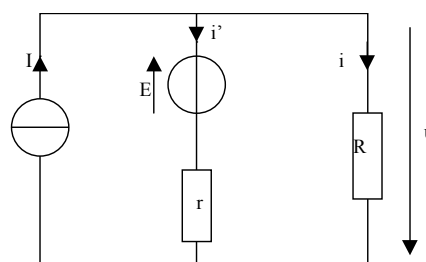
Et les tensions à leurs bornes $\{u\}_3 = \lambda . \{u\}_1 + \mu . \{u\}_2$

Ce théorème est une conséquence de la linéarité des équations liant tensions et courants dans les lois de Kirchhoff des dipôles linéaires.

Lorsqu'un réseau linéaire comporte plusieurs sources de tensions et/ou de courant indépendantes, on peut calculer l'intensité (ou la tension) d'une branche en allumant successivement chacune des sources toutes les autres étant éteintes. L'intensité (ou la tension) cherché lorsque toutes les sources sont allumées est la somme de toutes les intensités (ou tensions) trouvées précédemment.

Exemple :

On éteint le générateur d'intensité, puis de tension.

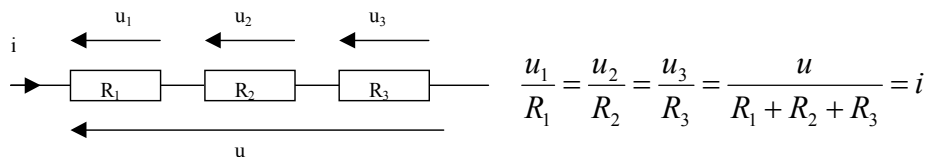


$$\begin{array}{lll} \{i_0\}_1: i_0 = 0 & \{i_0\}_2: i_0 = I & \{i_0\}_3: i_0 = I \\ \{e\}_1: e = E & \{e\}_2: e = 0 & \{e\}_3: e = E \\ \lambda = 1 & \mu = 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} i_1 = \frac{E}{R+r} & i_2 = \frac{r.i_0}{R+r} & i_3 = i_1 + i_2 = \frac{E+r.i_0}{R+r} \\ u = \frac{i_2}{G} = \frac{i_2'}{g} = \frac{i_0}{g+G} & i_2 = \frac{G.i_0}{G+g} = \frac{r.i_0}{R+r} & \end{array}$$

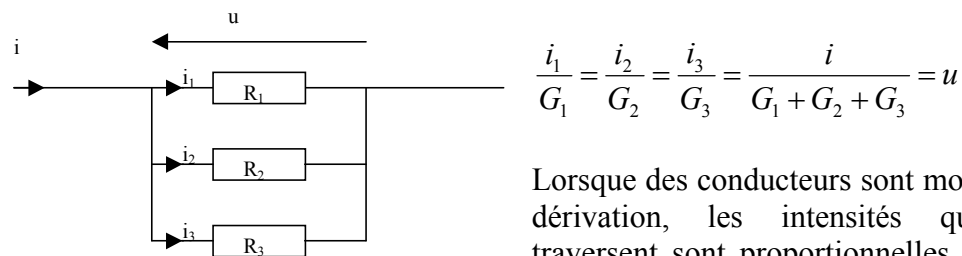
2.3 Les diviseurs de tension et de courant

2.3.1 Diviseur de tension



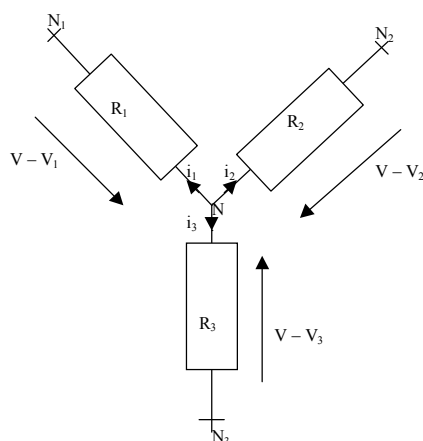
Lorsque des conducteurs sont montés en série, c'est à dire traversés par la même intensité de courant, les tensions à leurs bornes sont proportionnelles à leurs résistances.

2.3.2 Diviseur de courant



Lorsque des conducteurs sont montés en dérivation, les intensités qui les traversent sont proportionnelles à leurs conductances.

2.4 Loi des nœuds en terme de potentiel (ou théorème de Millmann)



Dans un réseau, un nœud N au potentiel V est entouré de k nœuds N_j aux potentiels V_j . On considère le cas particulier où le nœud N n'est séparé des k nœuds N_j que par des conducteurs ohmiques (= dipôles passifs linéaires) de conductances G_j .

$$\sum_{j=1}^k i_j = 0 \quad \text{loi des noeuds}$$

$$i_j = G_j \cdot (V - V_j)$$

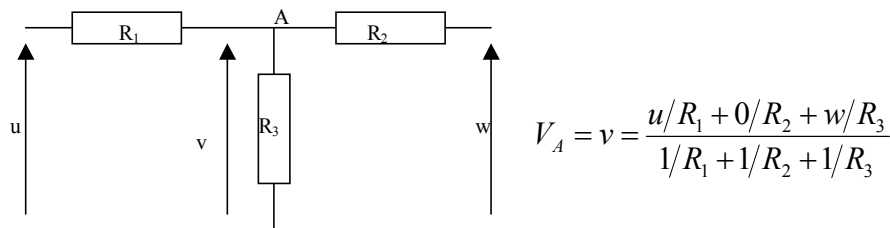
$$\sum_{j=1}^k G_j \cdot (V - V_j) = 0$$

$$V \cdot \sum_{j=1}^k G_j = \sum_{j=1}^k G_j \cdot V_j$$

$$V = \frac{\sum_{j=1}^k G_j \cdot V_j}{\sum_{j=1}^k G_j}$$

Dans un réseau passif linéaire, le potentiel d'un nœud est le barycentre des potentiels des nœuds voisins, pondérés par les conductances des branches.

Exemple :

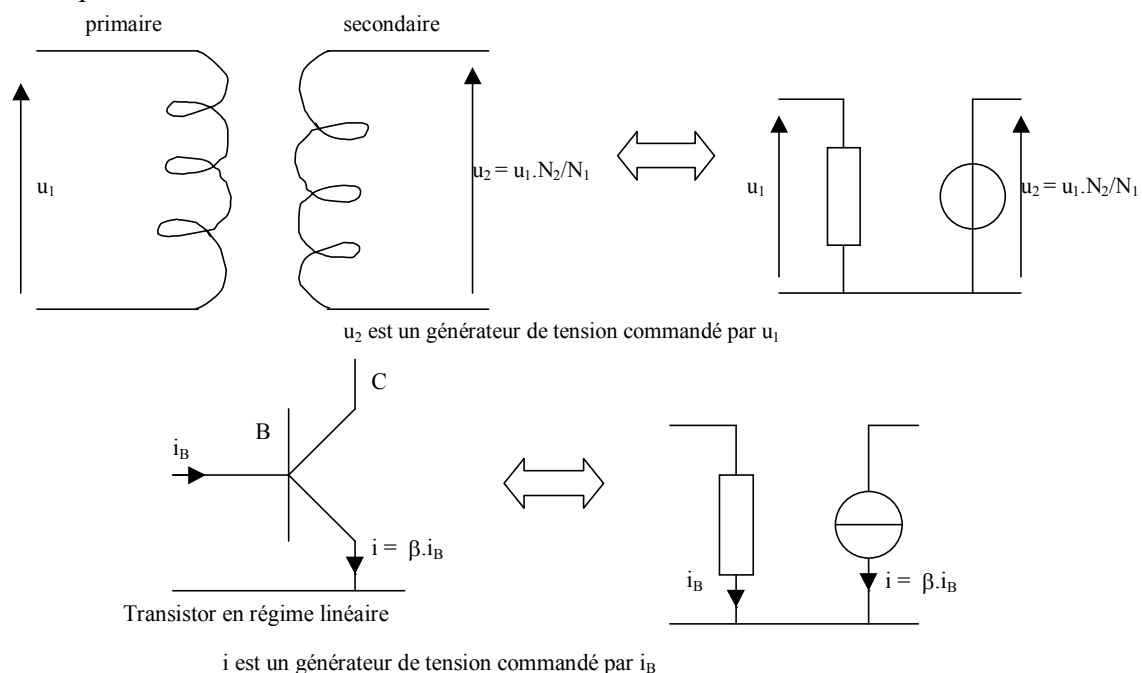


3 Les générateurs liés

3.1 Définition

Un générateur est dit lié (= commandé = contrôlé) si la valeur de la source de tension ou de courant dépend d'une autre grandeur électrique de réseau (tension ou intensité). Dans le cas contraire (étudié précédemment), il est dit indépendant ou autonome.

Exemple :



3.2 Application des théorèmes de Thévenin et Norton

Lorsqu'on applique les théorèmes de Thévenin et Norton, une partie de réseau est considéré comme circuit extérieur et l'autre partie est le réseau dipolaire dont on cherche le modèle.

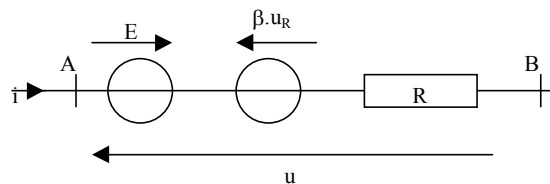
Si le réseau comporte un générateur commandé, le circuit extérieur ne doit pas comporter la commande d'un générateur resté dans le dipôle.

Pour déterminer la résistance équivalente au dipôle, on doit :

- Déterminer la source de tension e du modèle de Thévenin, c'est à dire la tension à vide aux bornes du dipôle.
- Déterminer la source de courant i_0 du modèle de Norton, c'est à dire le courant de court-circuit
- Calculer $r = \frac{e}{i_0}$

Il ne faut surtout pas éteindre la source commandée

Exemple :

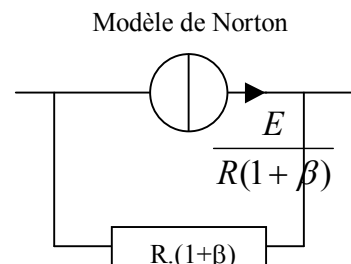
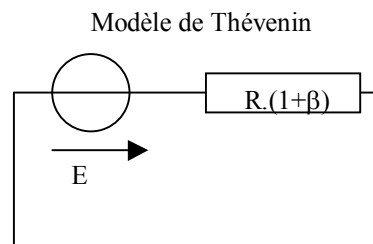


Tension à vide : valeur de u si $i = 0$ $u = -E$

Intensité en court-circuit : i si $u = 0$

$$u_R = R.i_0, R.i_0 + \beta.R.i_0 = E, i_0 = \frac{E}{R.(1+\beta)}$$

$$\text{Résistance équivalente : } r = \frac{e}{i_0} = \frac{E}{\frac{E}{R.(1+\beta)}} = R.(1+\beta)$$



Chapitre IV Dipôles linéaires en régime variable

1 Approximation des régimes quasi stationnaire

Un régime est variable si les tensions et les courants varient au cours du temps. Mais, dans un conducteur, les **variations** de potentiel et d'intensité se propagent à une vitesse finie, de l'ordre de la vitesse de la lumière dans le vide c .

Considérons un conducteur sans dérivation, de longueur l , et subissant à l'une de ses extrémités une variation d'intensité δi pendant un intervalle de temps $[0, \tau]$. La propagation n'étant pas instantanée, cette variation d'intensité aura lieu à l'autre bout du fil dans l'intervalle de temps $[1/c, \tau + 1/c]$. A chaque instant, l'intensité n'est donc plus la même pour chaque section de conducteur et la loi des nœuds n'est plus valable.

Cependant, si $1/c$ est très petit devant τ , on pourra le négliger. Cela revient à considérer que les variations d'intensité se propagent à une vitesse infinie et qu'à chaque instant l'intensité est la même dans toutes les sections du conducteur. C'est l'**approximation des régimes lentement variables** ou l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS). Dans l'ARQS, les **lois de Kirchhoff restent valables** pour les valeurs instantanées des tensions et des courants.

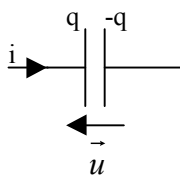
L'ARQS est correcte si la plus grande dimension du circuit l est petite devant $c\tau$, τ étant le temps caractéristique des variations de tension ou d'intensité (période si les variations sont périodiques, temps de relaxation, ...)

Par exemple, pour un régime périodique de fréquence 1 MHz (maximum d'un GBF) donc de période 1 μ s, l'ARQS est valable si les dimensions du circuit restent petites devant $L = 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-6} = 300$ m. C'est généralement vrai pour les circuits étudiés en TP, même s'il y a quelques bobines. Cela ne l'est plus pour des réseaux intercontinentaux ou pour des circuits fonctionnant en très haute fréquence (ordinateurs très rapides)

2 Relation tension – courant

Pour certains dipôles, les relations entre tension u et intensité i ne font intervenir que les valeurs instantanées de u et de i (conducteur ohmique, diode, ...); elles sont aussi bien valables en régime continu qu'en régime lentement variable. Pour d'autres dipôles tels que condensateurs et bobines, ces relations font intervenir les dérivées de u et de i par rapport au temps.

2.1 Condensateur



$q = C.u$ C est la capacité en Farad (F) de l'ordre du μF , nF, pF

$$i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du}{dt}$$

$$p = u.i = C.u \cdot \frac{du}{dt}$$

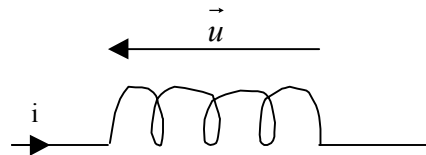
$$p \neq \infty \Rightarrow \frac{du}{dt} \neq \infty \Rightarrow u \text{ est continue}$$

Une puissance ne pouvant être infinie, **la tension aux bornes du condensateur est une fonction continue du temps.**

Si la tension est constante, l'intensité est nulle

En régime continu, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

2.2 Bobine



$$u = L \cdot \frac{di}{dt} \quad L \text{ est l'inductance en Henri (H) de l'ordre du mH}$$

$$p = L.i \cdot \frac{di}{dt}$$

$$p \neq \infty \Rightarrow \frac{di}{dt} \neq \infty \Rightarrow i \text{ est continue}$$

Une puissance ne pouvant être infinie, **l'intensité dans une bobine est une fonction continue du temps.**

Si l'intensité est constante, la tension aux bornes de la bobine est nulle

En régime continu, une inductance pure se comporte comme un court-circuit

3 Réseau linéaire

Soit un réseau comportant :

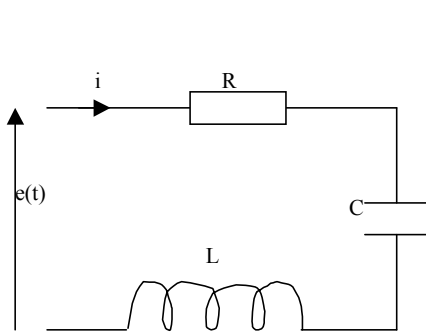
- des condensateurs ohmiques et autres dipôles linéaires
- des bobines
- des condensateurs

Lorsqu'on écrit pour ce réseau les lois des nœuds et les lois des mailles, on obtient des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Chacune des intensités et chacune des tensions vérifie donc une équation différentielle de la forme :

$$\sum_i \alpha_i \cdot \frac{d^{(i)} x(t)}{dt^i} = f(t)$$

où $x(t)$ est la tension ou l'intensité cherchée et $f(t)$ une fonction du temps imposée par le circuit extérieur.

Exemple : dipôle RLC série



$$e(t) = R.i + u_C + L.\frac{di}{dt}$$

$$f(t): \frac{de}{dt} = R.\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} + L\frac{d^2i}{dt^2}$$

$$\sum_i \alpha_i \cdot \frac{d^i x}{dt^i} = f(t)$$

$$\text{Si } f(t) = f_1(t), x = x_1(t)$$

$$\text{Si } f(t) = f_2(t), x = x_2(t)$$

$$\text{Si } f(t) = f_1(t) + f_2(t), x = x_1(t) + x_2(t) \text{ car } f(t) = \text{fonction linéaire}$$

Soit $x_1(t)$ la solution de l'équation différentielle pour $f = f_1(t)$

Soit $x_2(t)$ la solution de l'équation différentielle pour $f = f_2(t)$

Les équations étant linéaires à coefficients constants, $x_1(t) + x_2(t)$ est solution si $f = f_1(t) + f_2(t)$

Et donc $\lambda \cdot x_1(t)$ est solution si $f = \lambda \cdot f_1(t)$

Le théorème de superposition est applicable et le réseau est appelé réseau linéaire.

En régime lentement variable, un réseau est dit linéaire si les équations vérifiées par les tensions et les courants sont des équations différentielles linéaires à coefficients constants. On peut alors appliquer le théorème de superposition.

4 Régime transitoire et régime forcé

La solution générale de l'équation différentielle $\sum_i \alpha_i \cdot \frac{d^{(i)}x(t)}{dt^i} = f(t)$ est la somme de deux termes :

- $x_0(t)$ solution générale de l'équation $\sum_i \alpha_i \cdot \frac{d^{(i)}x(t)}{dt^i} = 0$, appelée équation différentielle sans second membre.
 - $X(t)$ solution particulière de l'équation avec second membre.
- $x(t) = x_0(t) + X(t)$

Lorsqu'il n'y a plus de tension ou de courant imposé par le circuit extérieur, à cause de la dissipation d'énergie par effet Joule, tensions et courants s'annulent. C'est pourquoi, dans la plupart des cas, $x_0(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$. C'est pourquoi $x_0(t)$ est appelé **régime transitoire**.

Au bout d'un temps de l'ordre de τ appelé **temps caractéristique** ou **temps de relaxation** du circuit, le régime transitoire devient négligeable et $x(t) = X(t)$. C'est pourquoi $X(t)$ est appelé **régime forcé**.

Si $x_0(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, on dit que le **régime forcé est stable**

4.1 Equation du premier ordre

Une équation du premier ordre est de la forme

$$a \cdot \frac{dx}{dt} + b \cdot x = 0 \quad \left[\frac{a}{b} \right] = T$$

On pose $\frac{a}{b} = \tau$ où τ est le temps caractéristique, ou temps de relaxation

$$x(t) = A \cdot e^{-t/\tau}$$

A quelle condition $x(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$?

$\tau > 0 \Leftrightarrow a$ et b de même signe

4.2 Equation du second ordre

L'équation du second ordre est de la forme :

$$a \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + b \cdot \frac{dx}{dt} + c \cdot x = 0$$

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{c} \cdot \frac{dx}{dt} + x = 0$$

Une étude en dimension des coefficients donne les résultats suivants

$$\left[\frac{a}{c} \right] = T^2$$

$$\left[\frac{b}{c} \right] = T$$

On pose $\frac{c}{a} = \Omega$ et $\frac{b}{c} = 2\lambda$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \cdot \frac{dx}{dt} + \Omega \cdot x = 0$$

Equation caractéristique :

$$r^2 + 2\lambda \cdot r + \Omega = 0$$

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4\Omega = 4(\lambda^2 - \Omega)$$

Cas 1 : Si $\Delta > 0$, i.e. $\lambda^2 > \Omega$

Il y a deux racines réelles r_1 et r_2 .

$$x(t) = A \cdot e^{r_1 t} + B \cdot e^{r_2 t}$$

$$x(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty \text{ si } r_1 < 0 \text{ et } r_2 < 0, \quad \text{I.e.} \begin{cases} r_1 + r_2 < 0 \\ r_1 \cdot r_2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{or} \begin{cases} r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} = -2\lambda < 0 \\ r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a} = \Omega > 0 \end{cases}$$

$$r_1 < 0 \text{ et } r_2 < 0 \Leftrightarrow a, b \text{ et } c \text{ de même signe}$$

Cas 2 : Si $\Delta = 0$, i.e. $\lambda^2 = \Omega$

L'équation caractéristique admet une racine double $r_0 = -\frac{b}{2a} = -\lambda$

$$x(t) = e^{-\lambda t} \cdot (At + B)$$

$$x(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty \Leftrightarrow \lambda > 0 \text{ ou } \frac{b}{2.a} > 0 \text{ ou } a \text{ et } b \text{ de même signe}$$

Mais $\lambda^2 = \Omega$, donc $\Omega > 0$, $\frac{c}{a} > 0$, donc a et c de même signe

$$\boxed{x(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty \Leftrightarrow a, b \text{ et } c \text{ de même signe}}$$

Cas 3 : Si $\Delta < 0$, i.e. $\lambda^2 < \Omega$

L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées :

$$\begin{cases} r_1 = -\lambda + j.\sqrt{\Omega - \lambda^2} \\ r_2 = -\lambda - j.\sqrt{\Omega - \lambda^2} \end{cases} \quad \text{on pose } \sqrt{\Omega - \lambda^2} = \omega$$

$$x(t) = A.e^{r_1.t} + B.e^{r_2.t}$$

$$x(t) = e^{-\lambda.t} . (-A.e^{j\omega t} + B.e^{-j\omega t})$$

$$x(t) = e^{-\lambda.t} . [A.\cos(\omega.t) + j.A.\sin(\omega.t) + B.\cos(\omega.t) - j.B.\sin(\omega.t)]$$

$$x(t) = e^{-\lambda.t} . [(A+B).\cos(\omega.t) + j.(A-B).\sin(\omega.t)]$$

$x(t)$ est réel ssi $A+B$ est réel et $A-B$ est imaginaire

$$A+B = X \text{ et } A-B = Y$$

$$x(t) = e^{-\lambda.t} . [X.\cos(\omega.t) + Y.\sin(\omega.t)]$$

$$\text{Ou encore } x(t) = e^{-\lambda.t} . A'.\cos(\omega.t + \phi)$$

$$x(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty \text{ si } \lambda > 0 \Leftrightarrow a \text{ et } b \text{ de même signe}$$

Mais $\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \Omega < 0 \Leftrightarrow \Omega > 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a} > 0 \Leftrightarrow c \text{ et } a \text{ de même signe}$

$$\boxed{\text{Donc } x(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty \Leftrightarrow a, b \text{ et } c \text{ de même signe}}$$

Dans les trois cas, $x(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty \Leftrightarrow c \text{ et } a \text{ de même signe}$, donc $\Omega = \frac{c}{a} > 0$.

On pose $\Omega = \omega_0^2$. L'équation différentielle devient :

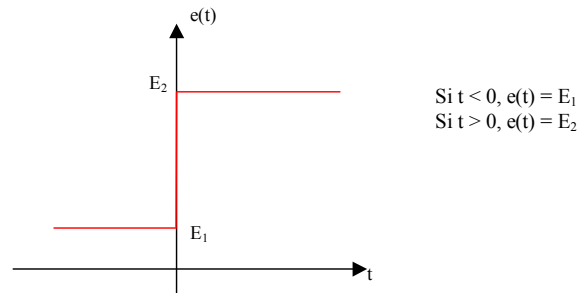
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2.\lambda.\frac{dx}{dt} + \omega_0^2.x = 0 \text{ (forme canonique)}$$

La détermination des constantes d'intégration se fait à partir des conditions initiales (un pour un 1^{er} ordre et deux pour un 2nd ordre)

Si $x_0(t)$ est solution de l'équation sans second membre comportant une ou deux constantes d'intégration, et $X(t)$ une solution particulière de l'équation avec second membre sans constante d'intégration : $x(t) = x_0(t) + X(t)$ doit vérifier les conditions initiales.

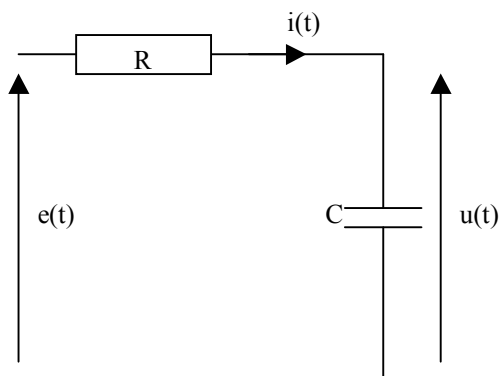
Chapitre V REPONSE D'UN DIPOLE A UN ECHELON DE TENSION : REGIME TRANSITOIRE ET REGIME PERMANENT

Un échelon de tension



1 Dipôle RC

1.1 Equation différentielle



L'équation régissant le circuit électrique ci-contre est :

$$u + R \cdot i = e$$

$u + RC \cdot \frac{du}{dt} = e$, RC est homogène à un temps

On pose $\tau = RC$, où τ est le temps caractéristique (ou de relaxation) du système.

1.2 Régime transitoire

Le régime transitoire est donné par

$$u + RC \cdot \frac{du}{dt} = 0$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = 0$$

Soit

$$u = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

1.3 Régime forcé : échelon de 0 à E, échelon de E à 0

Echelon de 0 à E

Si $t < 0$, $e(t) = 0$

Si $t > 0$, $e(t) = E$

De plus, si $t < 0$, $u(t)$ est supposée nulle (condition initiale)

$$u + \tau \cdot \frac{du}{dt} = E$$

$u = E = Cte$ est une solution particulière de cette équation. D'où la solution générale pour $t > 0$:

$$u(t) = E + A.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On détermine A grâce aux conditions initiales.

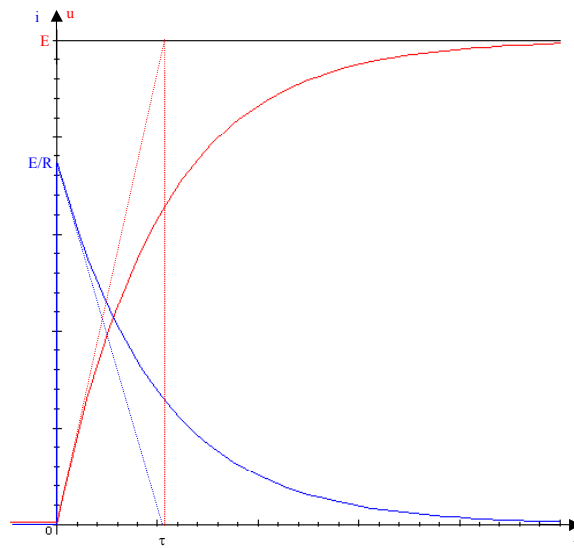
Si $t < 0$, $u = 0$. Or u est la tension aux bornes d'un condensateur, c'est donc une fonction continue du temps. A $t = 0^+$, $u = 0$. D'où $E + A = 0$.

$$u(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$i = C \cdot \frac{du}{dt} = C \cdot E$$

$$i = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Allure des courbes $i(t)$ et $u(t)$:



Quelques caractéristiques de la courbe :

A $t = 0$, $u = 0$

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{t=0} = \frac{E}{RC}$$

A $t = 0$, $i = \frac{E}{R}$

Si $t \rightarrow \infty$, $i \rightarrow 0$

$$\left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = -\frac{E}{R \cdot RC}$$

En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert : $u = 0$ et $i = E$.

En régime rapidement variable, $i = \frac{E}{R}$ et $u = 0$, le condensateur est équivalent à un fil.

L'intensité du courant dans un condensateur peut être une fonction discontinue du temps.

Echelon de E à 0 :

A $t < 0$, $e = E$ et $u = E$.

A $t > 0$, $e = 0$.

L'équation différentielle vérifiée par u est :

$$\tau \cdot \frac{du}{dt} + u = 0$$

La solution générale est $u = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$.

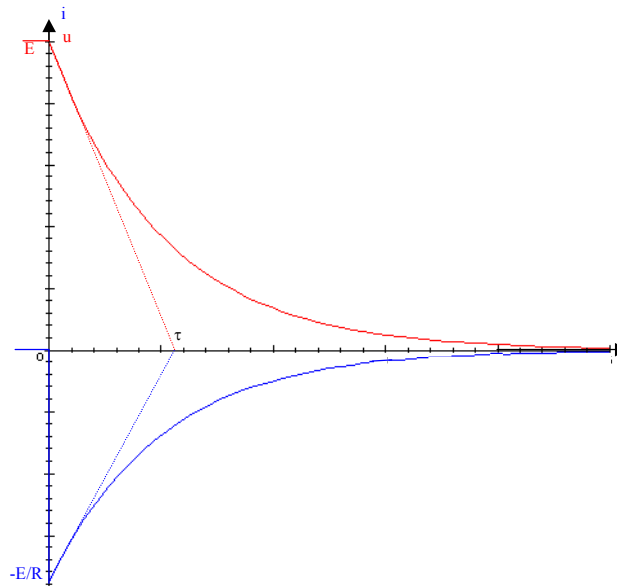
Pour déterminer A , on écrit qu'à $t < 0$, $u = E$. Or u est une fonction continue du temps (c'est la tension aux bornes d'un condensateur), donc à $t = 0^+$, $u = E$. D'où $A = E$.

$$u = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i = C \cdot \frac{du}{dt}$$

$$i = -\frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Courbes $u(t)$ et $i(t)$:



Quelques caractéristiques de la courbe :

A $t = 0^+$, $u = E$, $\frac{du}{dt} = -\frac{E}{RC}$

$$\text{A } t = 0^+, i = -\frac{E}{RC}, \frac{di}{dt} = \frac{E}{R.RC}$$

Si $t \rightarrow \infty, u \rightarrow 0$ et $i \rightarrow 0$

1.4

Bilan énergétique

Echelon de 0 à E :

Energie fournie par le générateur entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$:

La puissance fournie par le générateur est $P = E.i$

$$P = E.C \frac{du}{dt}$$

L'énergie fournie par le générateur vaut, si $t \ll 1$ s

$$\delta W_1 = E.C \frac{du}{dt} . dt = \int_0^\infty E.C \frac{du}{dt} . dt$$

$$P = \int_0^E E.C . du = C.E^2$$

Energie reçue par le condensateur :

$$P_C = u_c . i_c = u_c . \frac{du_c}{dt}$$

$$W_C = \int_0^\infty P_C . dt = \int_0^\infty C.u . \frac{du}{dt} . dt = \int_0^E C.u . du$$

$$W_C = \frac{C.E^2}{2}$$

Energie reçue par la résistance :

$$W_R = \int_0^\infty R.i^2 . dt = \int_0^\infty R . \frac{E^2}{R^2} . e^{-\frac{2.t}{\tau}} . dt = C.E^2 - \frac{C.E^2}{2}$$

$$W_R = \frac{C.E^2}{2}$$

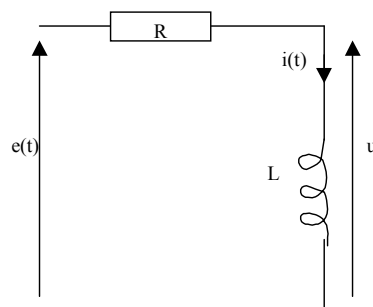
L'énergie dissipée dans la résistance ne dépend pas de la résistance

2

Dipôle RL

2.1

Equation différentielle



L'équation régissant le fonctionnement de ce circuit est :

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = e(t)$$

2.2 Régime transitoire

Le régime transitoire est donné par l'équation

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = 0$$

L et R sont positives, donc de même signe. Le régime transitoire tend vers 0 si t tend vers l'infini (ou encore, le régime forcé est stable)

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = 0 \quad \frac{L}{R} \text{ a les dimensions d'un temps.}$$

On pose $\tau = \frac{L}{R}$, temps caractéristique (ou de relaxation) du dipôle.

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$$

d'où

$$i = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2.3 Echelon de 0 à E, échelon de E à 0

Echelon de 0 à E :

A $t < 0$, $e(t) = 0$ et $i = 0$

A $t > 0$, $e(t) = E$. On cherche $i(t)$

Solution particulière de l'équation avec second membre qui s'écrit pour $t > 0$:

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}$$

On cherche une solution de la forme $i = \text{Cte}$

$$i = \frac{E}{R} \text{ (régime forcé ou continu)}$$

La solution générale de l'équation avec second membre est de la forme

$$i = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$$

A $t < 0$, $i = 0$ par hypothèse. Or i est l'intensité du courant dans une bobine, c'est donc une fonction continue du temps. Donc à $t = 0^+$, $i = 0$.

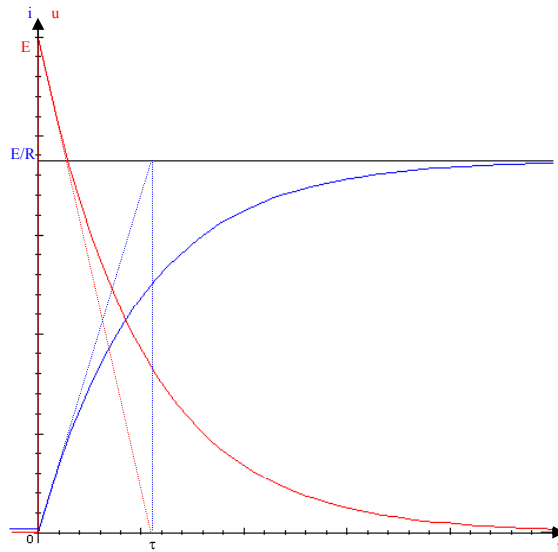
$$A + \frac{E}{R} = 0$$

$$\boxed{i = \frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

$$u = L \cdot \frac{di}{dt} = \frac{L \cdot E}{R} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\boxed{u = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Allure des courbes $i(t)$ et $u(t)$:



Quelques caractéristiques de la courbe :

Si $t = 0^+$, $i = 0$

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} = \frac{E/R}{L/R}$$

$$u = E$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{E}{\tau}$$

Si $t \rightarrow \infty$,

$$i \rightarrow \frac{E}{R}$$

$$u \rightarrow 0$$

En régime continu, une bobine se comporte comme un fil ($i = E/R$ et $u = 0$). En régime rapidement variable (à $t = 0^+$), la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert ($i = 0$ et $u = E$)

Echelon de E à 0 :

A $t < 0$, $e = E$ et $i = \frac{E}{R}$

A $t > 0$, $e = 0$. On cherche i

L'équation différentielle vérifiée par i :

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \text{ pour } t > 0$$

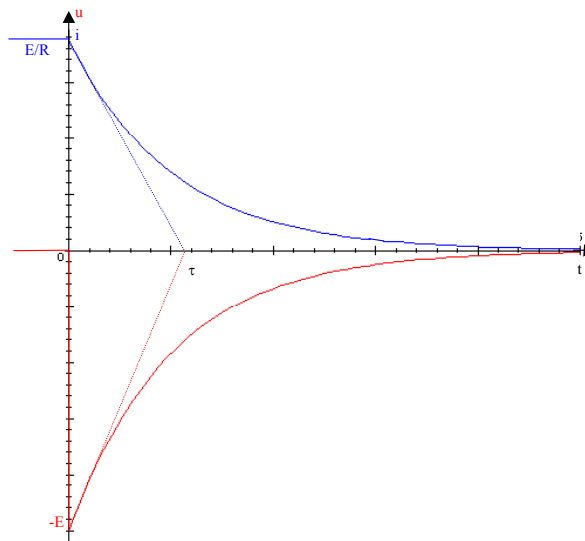
$$i = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A $t = 0^+$, $i = A = \frac{E}{R}$

$$i = \frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

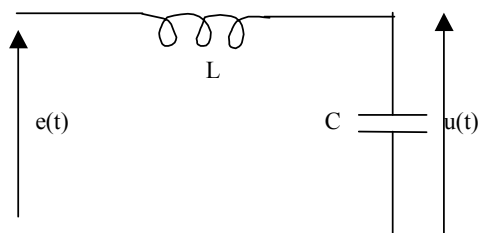
$$u = L.\frac{di}{dt} = -L.\frac{E}{R}.\frac{1}{L/R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u = -E.e^{-\frac{t}{\tau}}$$



3 Dipôle LC

3.1 Equation différentielle



Les équations régissant ce circuit électrique sont :

$$u + L \cdot \frac{di}{dt} = e(t)$$

$$i = C \frac{du}{dt}$$

$$u + LC \cdot \frac{d^2u}{dt^2} = e(t)$$

3.2 « Régime transitoire »

On pose $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0$$

$$u = U_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$u = A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \sin(\omega_0 t)$$

3.3 Echelon de 0 à E

Données du problème :

A $t < 0$, $e = 0$, $u = 0$ et $i = 0$

A $t > 0$, $e = E$. On cherche u et i

L'équation régissant le fonctionnement du circuit est

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = E \cdot \omega_0^2$$

Solution particulière : $u = E = Cte$

Solution générale : $u = E + A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \sin(\omega_0 t)$

A $t = 0^+$, $i = 0$ et $u = 0$

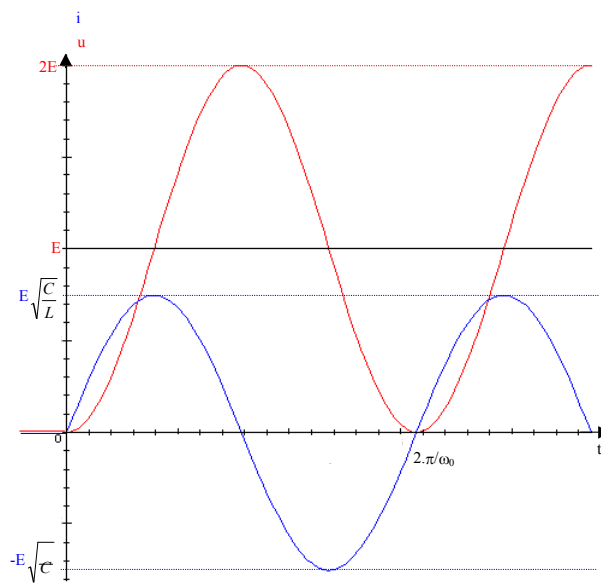
$$A = -E$$

$$i = C \frac{du}{dt} = C \cdot \omega_0^2 \cdot (B \cdot \cos(\omega_0 t) - A \cdot \sin(\omega_0 t))$$

$$i(0) = 0 = \omega_0 \cdot C \cdot B$$

donc $B = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= E \cdot (1 - \cos(\omega_0 t)) \\ i &= C \cdot E \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t) \end{aligned}}$$

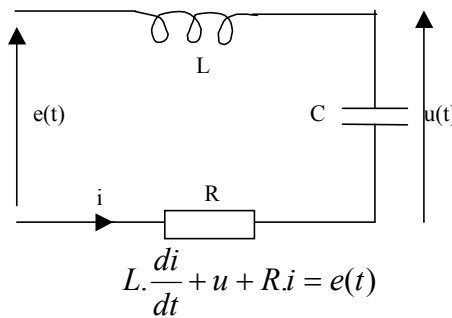


u et $\frac{du}{dt}$ sont des fonctions continues du temps

$$I_{Max} = C \cdot E \cdot \omega_0 = E \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

4 Dipôle RLC

4.1 Equation différentielle



Or $i = C \cdot \frac{du}{dt}$

Soit

$$LC \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} + u + RC \cdot \frac{du}{dt} = e(t)$$

On pose $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$ et $\frac{R}{L} = 2\lambda$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\lambda \cdot \frac{du}{dt} + \omega_0^2 \cdot u = e(t)$$

4.2 Régime transitoire

Le régime transitoire est donné par

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\lambda \cdot \frac{du}{dt} + \omega_0^2 \cdot u = 0$$

Soit

$$\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$$

La solution de l'équation va dépendre du signe de Δ .

Si $\Delta > 0$:

$$\lambda > \omega_0 \Leftrightarrow \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_c \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q$$

où R_c est la résistance critique, et Q le facteur de qualité.

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow R > R_c \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Une résistance forte entraîne un fort amortissement.

Dans ce cas, $u = A \cdot e^{r_1 \cdot t} + B \cdot e^{r_2 \cdot t}$, où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique

$r_1 < 0$ et $r_2 < 0$, donc $u \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$: le régime forcé est stable

Si $\Delta = 0$:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow R_C = R \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$$

$u = e^{-\lambda.t} \cdot (A + B.t)$, le régime forcé est stable.

Si $\Delta < 0$:

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow R < R_C \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$$

Ceci correspond à un amortissement faible.

$u = e^{-\lambda.t} \cdot (A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t)$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

Le régime forcé est stable.

4.3

Echelon de 0 à E

Données du problème :

A $t < 0$, $e = 0$, $i = 0$ et $u = 0$.

A $t > 0$, $e = E$. On cherche i et u

L'équation régissant le système est :

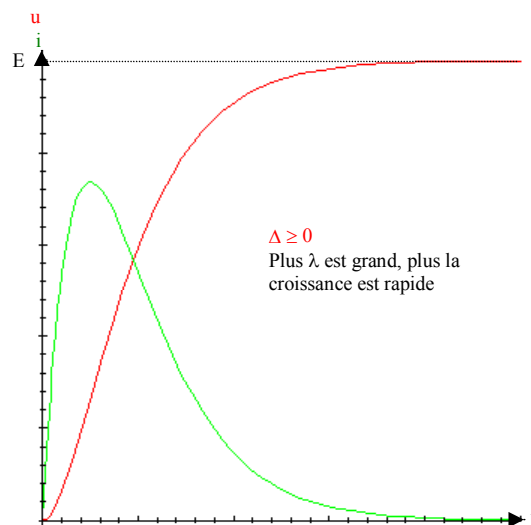
$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2.\lambda \cdot \frac{du}{dt} + \omega_0^2 \cdot u = \omega_0^2 \cdot E$$

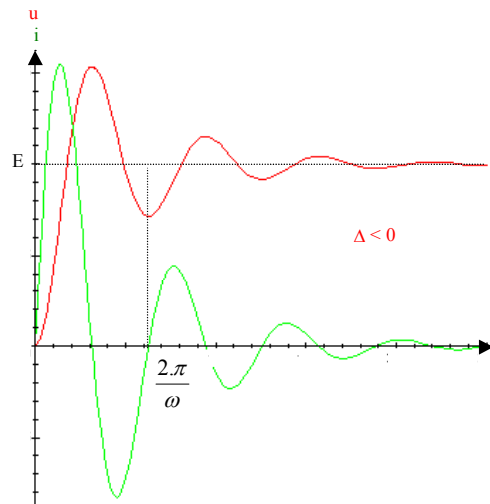
$u = E = Cte$ est solution particulière de cette équation.

La solution générale est donnée par

$$\begin{aligned} u &= E + A.e^{r_1.t} + B.e^{r_2.t} \text{ si } \Delta > 0 \\ u &= E + (A + B.t).e^{-\lambda.t} \text{ si } \Delta = 0 \\ u &= E + e^{-\lambda.t} \cdot (A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t) \text{ si } \Delta < 0 \end{aligned}$$

A et B sont deux constantes déterminées à partir des deux conditions initiales, et u et i sont des fonctions continues du temps.



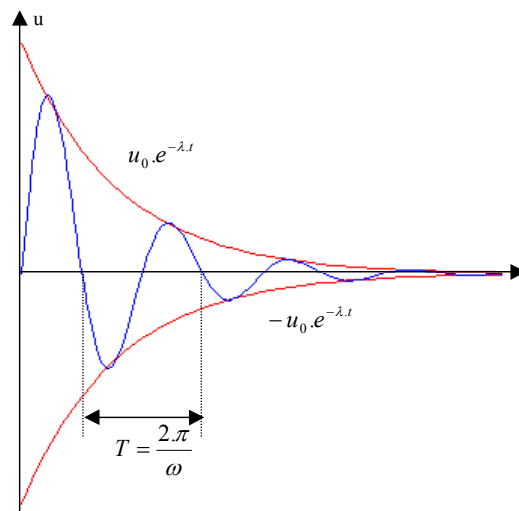


4.4 Régime pseudo-périodique

Le régime pseudo-périodique est donné par

$$u = u_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

où $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$



On peut démontrer que les extremums de la courbe sont pratiquement confondus avec les points où la courbe est tangente aux exponentielles.

Pseudo-pulsation :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

$$\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}}$$

Or

$$\frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{R}{2L} \cdot \sqrt{LC} = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2Q}$$

Soit

$$\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4.Q^2}}$$

Si Q est assez grand ($Q > 5$), $\frac{1}{4.Q^2} < \frac{1}{100} \ll 1$ et la pseudo-pulsation est égale à la pulsation propre ω_0 .

Remarque : Si $\varepsilon \ll 1$, $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n.\varepsilon$

Soit, si $Q \ll 1$, $\omega \approx \omega_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{8.Q^2}\right)$

Si on confond ω avec ω_0 , on commet une erreur relative de l'ordre de (pour $Q \ll 1$)

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = 1 - \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{8.Q^2}$$

Soit, si $Q = 5$, $\frac{\delta\omega}{\omega} = 0,5\%$

4.5

Définition du décrément logarithmique

On définit le décrément logarithmique comme suit

$$\delta = \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+T)}\right) \text{ où } T = \frac{2.\pi}{\omega}$$

Pour un régime pseudo-périodique,

$$\delta = \ln\left(\frac{U_0.e^{-\lambda.t}.\cos(\omega.t + \varphi)}{U_0.e^{-\lambda.(t+T)}.\cos(\omega(t+T) + \varphi)}\right) = \ln\left(\frac{e^{-\lambda.t}}{e^{-\lambda.(t+T)}}\right)$$

Soit

$$\delta = \lambda.T$$

Remarque : au premier ordre

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau}.x = \frac{B}{\tau} = Cte$$

La solution générale de cette équation est

$$x = A.e^{-t/\tau} + B$$

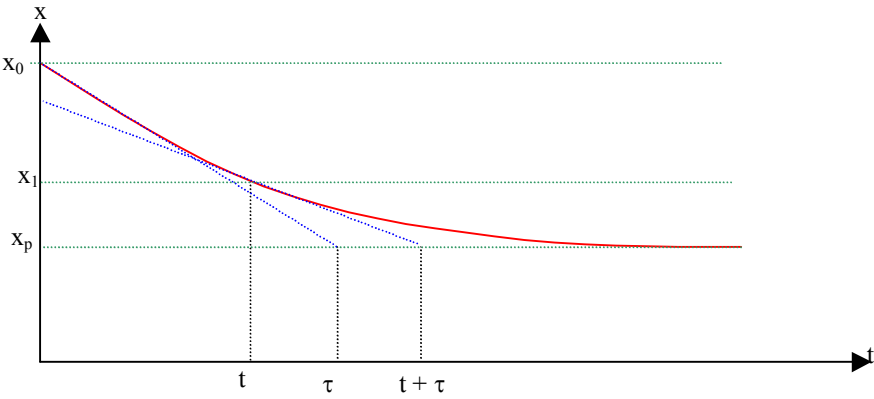
Si $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow B = x_{particulière}$

Si $t = 0$, $x_{init} = A + B$

D'où $A = x_{init} - x_{particulière}$

Soit au final :

$$x = (x_{init} - x_{particulière}).e^{-t/\tau} + x_{particulière}$$



Chapitre VI Réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé

1 Définitions

1.1 Régime sinusoïdal forcé

On considère un réseau dipolaire linéaire. Le circuit extérieur impose à une tension ou un courant d'être fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω . L'équation différentielle vérifiée par toute grandeur x (tension ou intensité) du réseau linéaire :

$$\sum_i \alpha_i \cdot \frac{d^{(i)}x}{dt^i} = f(t) \text{ s'écrit donc } \sum_i \alpha_i \cdot \frac{d^{(i)}x}{dt^i} = A \cdot \cos \omega t$$

Exemple : Dipôle RLC série alimenté par un générateur de tension sinusoïdale du temps $E \cdot \cos(\omega t)$. La tension u aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$LC \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \cdot \frac{du}{dt} + u = E \cdot \cos \omega t$$

Montrons que cette équation a une solution particulière de la forme :

$$u = U_1 \cdot \cos \omega t + U_2 \cdot \sin \omega t$$

En partant de cette expression de u , il vient

$$\frac{du}{dt} = -U_1 \cdot \omega \cdot \sin \omega t + U_2 \cdot \omega \cdot \cos \omega t$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -U_1 \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t - U_2 \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t$$

L'équation de fonctionnement du circuit doit être vérifiée pour tout t avec les valeurs de u et de ses dérivées successives calculées ci-dessus. En identifiant les termes en cosinus et sinus dans l'expression totale de fonctionnement, il vient

$$-LCU_1 \cdot \omega^2 + RCU_2 \cdot \omega + U_1 = E$$

$$-LCU_2 \cdot \omega^2 + RCU_1 \cdot \omega + U_2 = 0$$

Il y a bien une solution : c'est le régime sinusoïdal forcé (u est de même pulsation ω que le générateur).

D'une façon générale, on démontre que toute équation de la forme

$$\sum_i \alpha_i \cdot \frac{d^{(i)}x}{dt^i} = A \cdot \cos \omega t \text{ a une solution particulière fonction sinusoïdale du temps}$$

de pulsation ω qui peut s'écrire soit $x = X_1 \cdot \cos \omega t + X_2 \cdot \sin \omega t$ ou bien $x = X \cdot \cos(\omega t + \varphi)$. C'est le régime sinusoïdal forcé.

C'est le régime du réseau dès que le régime transitoire devient négligeable (s'il tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$).

Conclusion : Si un réseau **linéaire** comporte un (ou plusieurs) générateur(s) de tension (ou de courant) fonctions sinusoïdales du temps de même pulsation ω , le

régime forcé est fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω . Ceci signifie que toutes les tensions et toutes les intensités du réseau sont des fonctions sinusoïdales du temps de pulsation ω .

1.2 Amplitude, déphasage et valeur efficace

Une grandeur x (intensité ou tension), fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω peut toujours s'écrire sous la forme :

$$x = X \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$x \in [-X, X]$, **X est l'amplitude de x** et $x_{\max} - x_{\min} = 2 \cdot X$.

Soit deux grandeurs x_1 et x_2 fonctions sinusoïdales du temps de même pulsation ω :

$$x_1 = X_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ et } x_2 = X_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Le **déphasage** de x_2 par rapport à x_1 est

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

Il peut se mesurer en degré, radian ... On peut choisir son domaine de définition entre -180° et $+180^\circ$. Dans ce cas :

- Si $\varphi \in]-180^\circ, 0[$, x_2 est en retard sur x_1
- Si $\varphi \in]0, 180^\circ[$, x_2 est en avance sur x_1

Soit x une fonction périodique du temps de période T . Sa valeur efficace X_e est définie par :

$$X_e^2 = \text{valeur moyenne de } x^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x^2 \cdot dt$$

Si x est une fonction sinusoïdale du temps,

$$X_e = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Ce résultat n'est valable que pour les fonctions sinusoïdales du temps. La relation liant l'amplitude à la valeur efficace dépend de la fonction $x(t)$.

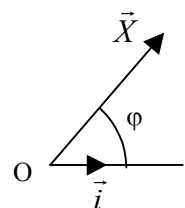
2 Résolution d'un réseau en régime sinusoïdal forcé

Pour déterminer une tension ou un courant dans un réseau linéaire en régime sinusoïdal forcé, on peut écrire l'équation différentielle qu'elle vérifie, le second membre étant fonction sinusoïdale du temps. Il faut ensuite rechercher la solution particulière de la forme $x = X \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ donc dériver et additionner des fonctions sinusoïdales du temps de même pulsation ω . Plusieurs méthodes conduisent au résultat. Nous en avons exposé une au paragraphe 1.1. Il y en a de plus simple et de plus rapide.

2.1 Représentation de Fresnel

$x = X \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ est représenté par le vecteur $\vec{X}$

- de norme X
- faisant avec l'axe Ox , origine des phases, un angle φ à la date $t = 0$



- tournant à la vitesse angulaire ω autour de O

A la date t , $Ox, \vec{X} = \omega.t + \varphi$. A chaque instant, $x = \vec{X} \cdot \vec{i}$ est la mesure algébrique de la projection de $\vec{X}$ sur $\vec{i}$ vecteur unitaire de l'axe Ox.

Dérivée de x par rapport au temps :

$\frac{dx}{dt} = -\omega.X.\sin(\omega.t + \varphi) = -\omega.X.\cos\left(\omega.t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ sera donc représenté par le vecteur :

- de norme ωX
- faisant avec l'axe Ox, origine des phases, un angle $\varphi + \pi/2$ à la date $t = 0$
- tournant à la vitesse angulaire ω autour de 0

Somme de deux fonctions sinusoïdales du temps de même pulsation :

$x_1 = X_1.\cos(\omega.t + \varphi_1)$ est représenté par le vecteur $\vec{X}_1$.

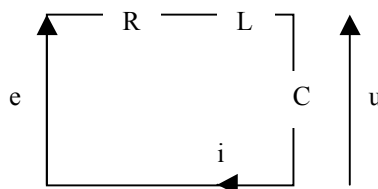
$x_2 = X_2.\cos(\omega.t + \varphi_2)$ est représenté par le vecteur $\vec{X}_2$.

$$x = x_1 + x_2 = \vec{X}_1 \cdot \vec{i} + \vec{X}_2 \cdot \vec{i} = (\vec{X}_1 + \vec{X}_2) \cdot \vec{i} = \vec{X} \cdot \vec{i}$$

x est la somme des projections de $\vec{X}_1$ et $\vec{X}_2$ sur Ox. C'est donc aussi la projection de $\vec{X} = (\vec{X}_1 + \vec{X}_2)$.

Mais $\vec{X}_1$ et $\vec{X}_2$ tournant à la même vitesse ω , $\vec{X} = (\vec{X}_1 + \vec{X}_2)$ est un vecteur de norme X constante, qui tourne aussi à la vitesse ω et fait avec l'axe Ox, à la date t , un angle $\omega.t + \varphi$. La somme de deux fonctions sinusoïdales du temps de même pulsation ω est une fonction sinusoïdale du temps de même pulsation ω . Le vecteur de Fresnel représentant $x = x_1 + x_2$ est $\vec{X} = (\vec{X}_1 + \vec{X}_2)$.

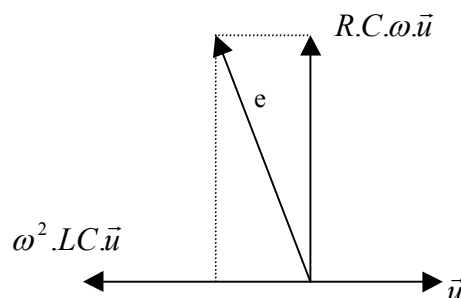
Exemple :



L'équation régissant le système est

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = \frac{e}{LC}$$

On suppose que $e = E.\cos\omega.t$. On cherche $u(t)$ en régime forcé, fonction sinusoïdale de pulsation ω .



De la représentation de Fresnel, nous déduisons que

$$E^2 = (RC.\omega.u)^2 + (LC.\omega^2 - 1)^2 . u^2$$

Soit

$$u = \frac{E}{\sqrt{(RC.\omega)^2 + (LC.\omega^2 - 1)^2}}$$

2.2 Représentation complexe

Au lieu d'associer à $x = X.\cos(\omega.t + \varphi)$ le vecteur $\vec{X}$, on lui associe le complexe $\underline{x}$ de module X et d'argument $\omega.t + \varphi$:

$$\underline{x} = X.e^{j(\omega.t + \varphi)} \text{ et } x = \text{Re}(\underline{x})$$

L'amplitude complexe $\underline{X}$ est définie par :

$$\underline{X} = X.e^{j.\varphi}$$

D'où

$$X = |\underline{X}| \quad \varphi = \arg \underline{X} \quad \underline{x} = \underline{X}.e^{j.\omega.t}$$

$\underline{X}$ est un complexe qui contient à lui seul les deux informations d'amplitude X et de phase φ de x .

Dérivée par rapport au temps :

$$\frac{dx}{dt} = \omega.X.\cos\left(\omega.t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = j.\omega.\underline{x} = \omega.X.e^{j\left(\omega.t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = j.\omega.\underline{X}.e^{j.\omega.t}$$

$$\text{Re}\left(\frac{d\underline{x}}{dt}\right) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\text{Re } \underline{x})$$

$\frac{dx}{dt}$ est donc représenté par le complexe $\frac{d\underline{x}}{dt} = j.\omega.\underline{x}$ d'amplitude complexe $j.\omega.\underline{X}$
--

Autrement dit, en représentation complexe, une dérivation par rapport au temps est une multiplication par $j\omega$.

Somme de deux fonctions sinusoïdales du temps de même pulsation ω :

$$x_1 = X_1.\cos(\omega.t + \varphi_1) \text{ est représenté par } \underline{x}_1 = X_1.e^{j.\varphi_1}.e^{j.\omega.t}$$

$$x_2 = X_2.\cos(\omega.t + \varphi_2) \text{ est représenté par } \underline{x}_2 = X_2.e^{j.\varphi_2}.e^{j.\omega.t}$$

$$\underline{x}_1 + \underline{x}_2 = (X_1.e^{j.\varphi_1} + X_2.e^{j.\varphi_2}).e^{j.\omega.t}$$

$$\text{Or } \text{Re}(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = \text{Re}(\underline{x}_1) + \text{Re}(\underline{x}_2)$$

$x_1 + x_2$ est représenté par $\underline{x}_1 + \underline{x}_2$ d'amplitude complexe $\underline{X}_1 + \underline{X}_2$

*Remarque : Produit de deux fonctions sinusoïdales du temps de même pulsation :
On pourrait montrer par le calcul que*

$$x_1.x_2 \neq \underline{x}_1.\underline{x}_2$$

Ainsi, l'utilisation de la représentation complexe n'est pas valable lorsqu'un produit intervient dans nos calculs.

Exemple : Résolution du dipôle RLC série :

L'équation régissant le fonctionnement du dipôle est :

$$LC \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \cdot \frac{du}{dt} + u = e$$

L'utilisation de la représentation complexe de u et e aboutit à l'expression (u et e étant déphasés de φ)

$$-LC \cdot \omega^2 \cdot U \cdot e^{j\varphi} + j \cdot RC \cdot \omega \cdot U \cdot e^{j\varphi} + U \cdot e^{j\varphi} = E$$

La résolution de cette équation donne

$$U = \frac{E}{\sqrt{(1 - LC \cdot \omega^2)^2 + (RC \cdot \omega)^2}}$$

$$\varphi = -\arg(1 - LC \cdot \omega^2 + j \cdot RC \cdot \omega)$$

3 Impédance et admittance complexe

3.1 Définitions

On considère un dipôle **passif** et **linéaire** orienté en convention récepteur.

En régime sinusoïdal forcé, i et u sont fonctions sinusoïdales du temps de même pulsation ω .

$$i = I \cos \omega t \text{ et } u = U \cos(\omega t + \varphi)$$

φ est le déphasage de u par rapport à i .

L'impédance réelle du dipôle est

$$Z = \frac{U}{I}$$

Une impédance à la même dimension qu'une résistance ; elle se mesure en ohm.

L'impédance complexe du dipôle est :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

D'où

$$Z = |\underline{Z}| \text{ et } \varphi = \arg(\underline{Z})$$

L'admittance réelle du dipôle est

$$Y = \frac{I}{U}$$

Une admittance à la même dimension qu'une conductance ; elle se mesure en Siemens.

L'admittance complexe du dipôle est :

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = Y \cdot e^{-j\varphi}$$

D'où

$$Y = |\underline{Y}| \text{ et } \varphi = \arg(-\underline{Y})$$

Les relations tension – courant peuvent donc s'écrire :

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \text{ et } \underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} \quad \text{entre amplitudes complexes}$$

ou $\underline{u} = \underline{Z}.\underline{i}$ et $\underline{i} = \underline{Y}.\underline{u}$

3.2 Dipôles de base

Conducteur ohmique :

Pour un conducteur ohmique

$$u = R.i$$

Si $i = I.\cos\omega.t$ et $u = R.i.\cos\omega.t$, alors

$$\underline{u} = R.\underline{i}$$

ou encore

$$\underline{U} = R.\underline{I}$$

Soit

$\underline{Z} = Z = R$ $\varphi = 0$ $\underline{Y} = G = 1/R$

Inductance :

Pour une inductance

$$u = L.\frac{di}{dt}$$

Soit, en régime sinusoïdal forcé, en utilisant la notation complexe

$$\underline{u} = j.L.\omega.\underline{i}$$

ou encore

$$\underline{U} = j.L.\omega.\underline{I}$$

Soit

$\underline{Z} = j.L.\omega$ $Z = L.\omega$ $\varphi = \pi/2$ $Y = \frac{1}{j.L.\omega} = -\frac{j}{L.\omega}$
--

Condensateur :

Pour un condensateur

$$i = C.\frac{du}{dt}$$

Soit, en régime sinusoïdal forcé, en utilisant la notation complexe

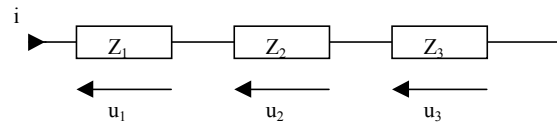
$$\underline{I} = j.\omega.C.\underline{U}$$

Soit

$\underline{Y} = j.C.\omega$ $\underline{Z} = \frac{1}{j.C.\omega}$ $Z = \frac{1}{C.\omega}$ $\varphi = -\pi/2$

3.3 Associations de dipôles

Association série :



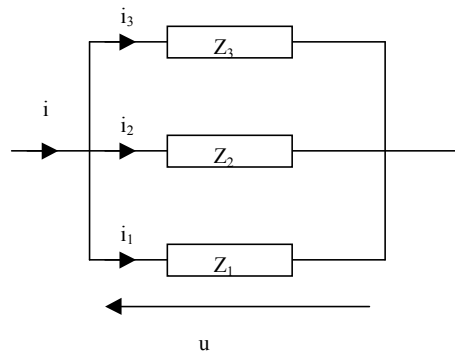
En notation complexe,

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = \underline{I}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)$$

Soit

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3$$

Association parallèle :



En notation complexe,

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{U}(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)$$

Soit

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$$

S'il n'y a que deux dipôles en dérivation,

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

4 Lois des réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé

La représentation complexe permet de remplacer les équations différentielles entre fonctions et dérivées par des équations entre grandeurs complexes. Ces équations sont **linéaires**, comme les équations du régime continu. Les lois des réseaux linéaires en régime continu sont donc applicables.

4.1 Théorème de superposition

Le théorème de superposition est bien sûr applicable ; c'est la définition d'un réseau linéaire. On superpose et donc on additionne des grandeurs complexes.

4.2 Théorème de Thévenin et Norton

En régime sinusoïdal forcé, un dipôle linéaire peut être remplacé par un générateur de tension en série avec un dipôle passif. L'impédance complexe de ce

dipôle passif est l'impédance $\underline{Z}$ du dipôle lorsque les générateurs de tension et de courant sont éteints. La fem du générateur de Thévenin a pour amplitude complexe $\underline{E}$, celle de la tension aux bornes du dipôle fonctionnant à vide.

$$\underline{u} = \underline{E} + \underline{Z} \cdot \underline{i}$$

Le dipôle linéaire peut aussi être remplacé par un générateur de courant en dérivation avec un dipôle passif. L'impédance complexe de ce dipôle passif est identique à celle du modèle de Thévenin. Son admittance est donc $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$. Le cem du générateur de Norton a pour amplitude complexe $\underline{I}_0$, celle de l'intensité de court-circuit du dipôle.

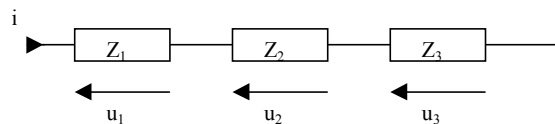
$$\underline{i} = \underline{I}_0 + \underline{Y} \cdot \underline{u}$$

De ces deux relations, on déduit bien sûr :

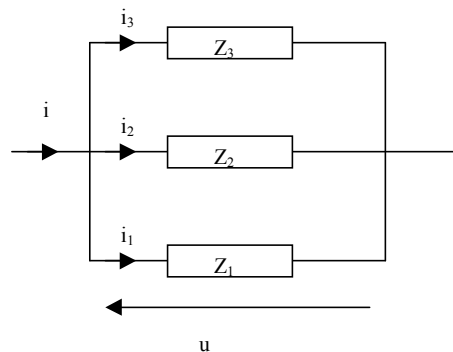
$$\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{I}_0}$$

Attention : Il peut aussi y avoir des générateurs commandés. Dans ce cas, il ne faut pas éteindre les sources pour calculer l'impédance équivalente. On doit déterminer $\underline{E}$ et $\underline{I}_0$ et en déduire $\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{I}_0}$.

4.3 Diviseur de tension et de courant

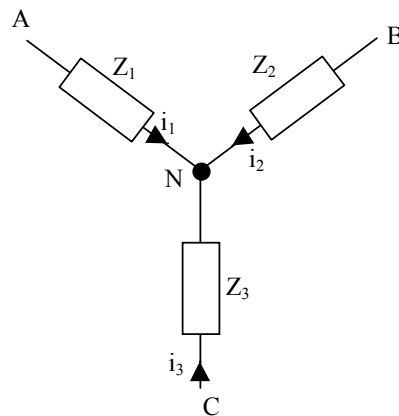


$$\frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$



$$\frac{\underline{I}}{\underline{Y}} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{Y}_1} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{Y}_2} = \frac{\underline{I}_3}{\underline{Y}_3}$$

4.4 Lois des nœuds en terme de potentiel



$$\underline{I}_k = \underline{Y}_k \cdot (\underline{V}_k - \underline{V}_N)$$

La loi des nœuds donne

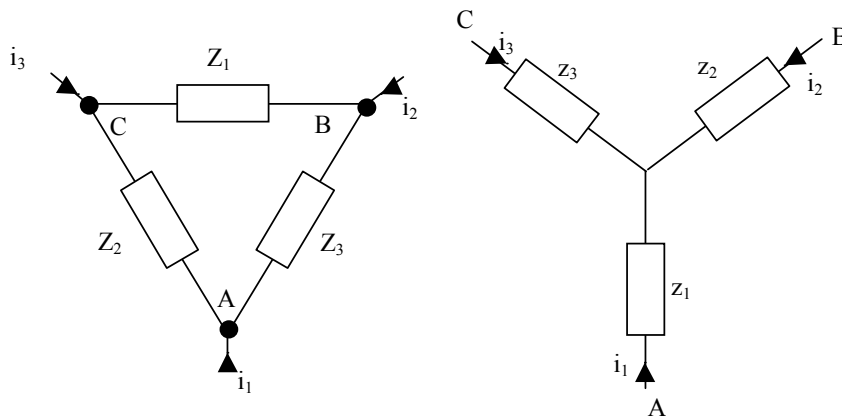
$$\sum_k \underline{I}_k = 0$$

$$\sum_k \underline{Y}_k \cdot \underline{V}_k = \sum_k \underline{Y}_k \cdot \underline{V}_N$$

Soit

$$\underline{V}_N = \frac{\sum_k \underline{Y}_k \cdot \underline{V}_k}{\sum_k \underline{Y}_k}$$

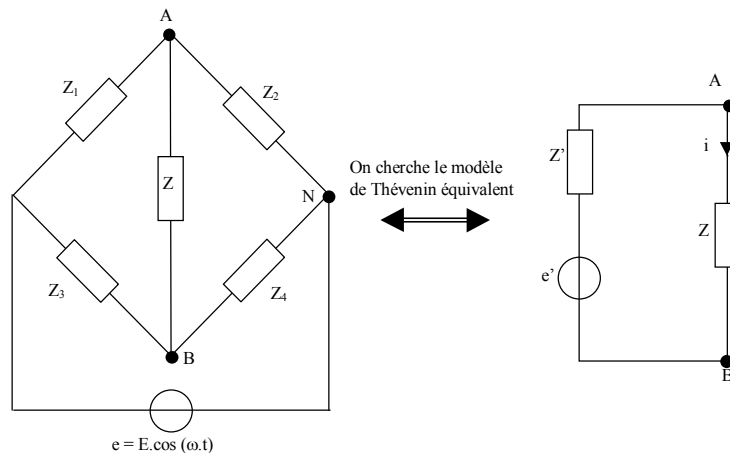
4.5 Théorème de Kennely



Si les courants i_1 , i_2 et i_3 sont inchangés, la transformation de l'un des deux circuits ci-dessus à l'autre ne modifie pas les potentiels en A, B et C.

$$\begin{aligned} \underline{z}_1 &= \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \underline{z}_2 &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \underline{z}_3 &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{aligned}$$

4.6 Exemple : Pont de type wheastone



On utilise la notation complexe. Les relations ci-dessous sont données pour les amplitudes complexes.

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}'}{\underline{Z} + \underline{Z}'}$$

Les caractéristiques du modèle de Thévenin sont les suivantes :

$$\underline{Z}' = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}$$

$$\underline{E}' = (\underline{V}_A - \underline{V}_N) - (\underline{V}_B - \underline{V}_N) = \underline{E} \cdot \left(\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} - \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} \right) = \underline{E} \cdot \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}$$

Par définition, le pont est dit équilibré si $i = 0$, soit $I = 0$. Le pont est donc équilibré si

$$\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4$$

Exemple :

- Z_1 est l'association série d'une inductance L et d'une résistance r
- Z_2 est une résistance Q
- Z_3 est une résistance ρ
- Z_4 est l'association en parallèle d'une résistance réglable R et d'une conductance réglable C

Tous calculs fait, en identifiant les parties réelle et imaginaire, la condition d'équilibrage du pont est

$$r = \frac{\rho Q}{R}$$

$$L = P \cdot Q \cdot C$$

Il est possible d'équilibrer le pont en jouant sur les valeurs de R et C

5 Intérêts de l'étude du régime sinusoïdal forcé

5.1 Recherche de l'équation différentielle vérifiée par une intensité ou une tension

Soit x une intensité ou une tension dans un réseau linéaire, en régime **quelconque**. On recherche l'équation différentielle vérifiée par x . On peut la trouver en

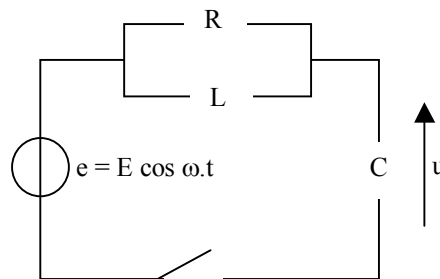
écrivant les lois des nœuds et les lois des mailles, puis en résolvant un système d'équations linéaires.

Il est généralement plus simple de supposer que le générateur impose un régime sinusoïdal forcé de pulsation ω . En régime forcé, x est donc une fonction sinusoïdale du temps de la forme

$$x = X \cdot \cos(\omega.t + \varphi)$$

On établit l'équation complexe vérifiée par $\underline{X} = X \cdot e^{j.\varphi}$. Dans cette équation, on remplace l'opérateur $\times j.\omega$ par l'opérateur $\frac{d}{dt}$, l'opérateur $\times (-\omega^2)$ par l'opérateur $\frac{d^2}{dt^2}$... et les amplitudes complexes par les valeurs instantanées. On obtient ainsi l'équation différentielle vérifiée par x .

Exemple : dipôle RLC série



On cherche u . après calculs, on obtient la relation

$$u = E \cdot \frac{R + j.L.\omega}{R + j.L.\omega - R.L.C.\omega^2}$$

Soit

$$u.(R + j.L.\omega - R.L.C.\omega^2) = E.(R + j.L.\omega)$$

Ce qui donne dans en valeurs instantanées

$$R.u + L.\frac{du}{dt} + R.L.C.\frac{d^2u}{dt^2} = e.R + L.\frac{de}{dt}$$

5.2 Etude de régimes forcés périodiques non sinusoïdaux

Le circuit extérieur impose une tension ou un courant périodique non sinusoïdal (triangulaire, créneau, ...). Quelle est la réponse du réseau ? Quelles sont les intensités et les tensions dans le réseau en régime forcé ?

Si on additionne des fonctions sinusoïdales du temps de périodes $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \frac{T}{4}, \dots$ et donc de fréquences $f, 2.f, 3.f, 4.f, \dots$ on obtient bien sûr une fonction périodique de période T et de fréquence f .

On admettra que réciproquement, toute fonction périodique de fréquence f peut être décomposée en une somme de fonctions sinusoïdales de fréquences $f, 2.f, 3.f, 4.f, \dots$ C'est la décomposition en série de Fourier de la fonction périodique.

Pour connaître la réponse d'un réseau **linéaire** à un signal périodique, il suffit donc de déterminer la réponse du réseau pour chaque composante sinusoïdale de la série de Fourier du signal périodique, puis d'appliquer les théorèmes de superposition.

Mais attention, les impédances complexes dépendent de la pulsation et donc de la fréquence. Elles sont différentes pour chacune des composantes de la série de Fourier.

La décomposition en série de Fourier de la réponse est différente de celle du signal d'entrée. Une tension triangulaire imposée à l'entrée d'un réseau ne donne pas que des tensions ou des courants fonctions triangulaires du temps dans le réseau.

Chapitre VII Quadripôles linéaires en régime sinusoïdal forcé

1 Définitions

1.1 Quadripôle

Un quadripôle est un réseau électrique dont on distingue quatre bornes : deux bornes d'entrée reliées à un générateur d'entrée et deux bornes de sorties reliées à un circuit d'utilisation (ou charge).



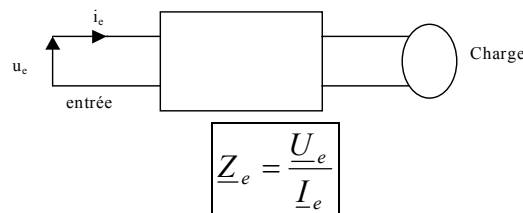
1.2 Impédance d'entrée, impédance de sortie

On étudie le quadripôle en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω . Les amplitudes complexes des tensions d'entrée et de sortie sont notées $\underline{U}_e$ et $\underline{U}_s$; les amplitudes complexes des intensités sont notées $\underline{I}_e$ et $\underline{I}_s$. Le quadripôle étant linéaire, il existe des relations linéaires entre ces amplitudes complexes :

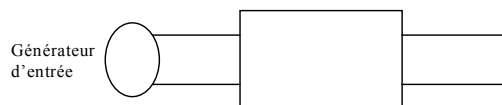
$$\begin{aligned}\underline{I}_e &= a.\underline{U}_e + b.\underline{U}_s & \underline{U}_e &= \alpha.\underline{I}_e + \beta.\underline{I}_s \\ \underline{I}_s &= c.\underline{U}_e + d.\underline{U}_s & \underline{U}_s &= \gamma.\underline{I}_e + \delta.\underline{I}_s\end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est appelé matrice admittance ; $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est appelé matrice impédance.

La charge étant donnée, les deux bornes d'entrée sont celles d'un dipôle linéaire et passif caractérisé par une impédance appelée impédance d'entrée du quadripôle :



Le générateur d'entrée étant donné, les deux bornes de sortie sont celles d'un dipôle linéaire actif qui peut être modélisé par un générateur de Thévenin c'est-à-dire une source de tension en série avec une impédance $\underline{Z}_s$. $\underline{Z}_s$ est l'impédance de sortie du quadripôle.



1.3 Fonction de transfert

On considère le quadripôle relié à une charge donnée.

Le signal appelé signal d'entrée peut être la tension $u_e(t)$ ou l'intensité $i_e(t)$; nous le noterons $e(t)$. Le signal appelé signal de sortie peut être la tension $u_s(t)$ ou l'intensité $i_s(t)$; nous le noterons $s(t)$.

Le quadripôle est linéaire, $e(t)$ et $s(t)$ sont donc liés par une équation différentielle linéaire de la forme :

$$\sum_{i=0}^m a_i \cdot (j\omega)^i \cdot \underline{e} = \sum_{k=0}^n b_k \cdot (j\omega)^k \cdot \underline{s}$$

On en déduit :

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i \cdot (j\omega)^i}{\sum_{k=0}^n b_k \cdot (j\omega)^k} = \underline{H}(j\omega)$$

$\underline{H}(j\omega)$ est appelée **fonction de transfert** du quadripôle.

1.4 Gain, phase et diagramme de Bode

$\boxed{H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|}$ est appelé **gain** du quadripôle.

H est fonction de ω ; certaines pulsations sont amplifiées tandis que d'autres sont pratiquement arrêtées ; les quadripôles sont également appelés **filtres**.

$\boxed{\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega))}$ est le déphasage de $\underline{s}$ par rapport à $\underline{e}$.

Un diagramme de Bode donne les variations de H et φ en fonction de la pulsation. Les domaines de fréquence étudiés sont étendus, généralement de quelques centaines de Hertz à quelques centaines de kiloHertz.

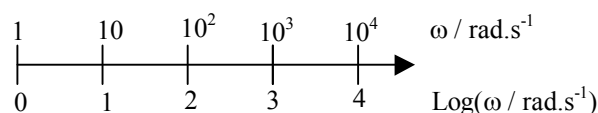
De même les variations de H avec ω sont très importantes. C'est pourquoi le diagramme de Bode utilise des échelles logarithmiques pour représenter les variations de H et de φ en fonction de ω .

Le gain en décibel (dB) est défini par

$$\boxed{G_{dB} = 20 \cdot \log_{10} H}$$

Se rappeler la touche -20 dB des GBF.

Le diagramme de Bode donne les deux courbes G_{dB} et φ en fonction de $\log_{10} \varphi$.



Le quadripôle est toujours caractérisé par une pulsation propre ω_0 ou un temps caractéristique τ . On choisit souvent de représenter G_{dB} et φ en fonction de $\log_{10} x$ avec $x = \omega / \omega_0$ ou $x = \omega \cdot \tau$. Ce n'est qu'un décalage d'origine sur l'axe des abscisses.

Remarque : ω et x sont des grandeurs variant de 0 à $+\infty$; $\log_{10} \omega$ et $\log_{10} x$ varient de $-\infty$ à $+\infty$.

Dans un diagramme de Bode, on trace toujours les asymptotes aux courbes. Parfois on ne trace que les asymptotes, c'est le diagramme asymptotique.

1.5 Fréquence de coupure

Soit $H_{\max}$ la valeur maximale de H ; $G_{\max} = 20 \cdot \log H_{\max}$ est la valeur maximale de G_{dB} .

Par définition, une pulsation de coupure ω_c est telle que :

$$H(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \text{ d'où } G(\omega_c) = G_{\max} - 3 \text{ dB}$$

ω_c est une pulsation de coupure et $f_c = \omega_c / 2\pi$ est une fréquence de coupure à -3 dB.

Un filtre peut avoir une ou plusieurs fréquences de coupure.

1.6 Ordre d'un filtre

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i \cdot (j\omega)^i}{\sum_{k=0}^n b_k \cdot (j\omega)^k}$$

Pour tous dipôles réels, on constate que le gain H reste fini lorsque $\omega \rightarrow \infty$ donc $n \geq m$. n est appelé **ordre du filtre**.

On peut poser $p = j\omega$. p est appelée **variable de Laplace**.

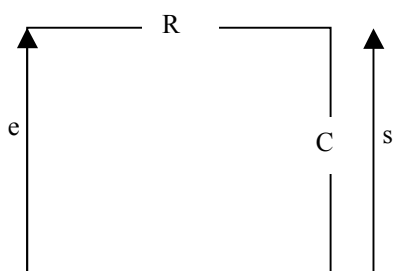
$\underline{H}$ est le rapport de deux polynômes en p de degrés n et m . Or un polynôme peut toujours être factorisé en terme d'ordre 1 ou 2. On pourra toujours écrire $\underline{H}(p) = \prod_i \underline{H}_i(p)$ où les $\underline{H}_i(p)$ sont des fonctions de transfert d'ordre $n_i \leq 2$. Or

$\underline{H}_i(p) = H_i \cdot e^{j \cdot \varphi_i}$ donc

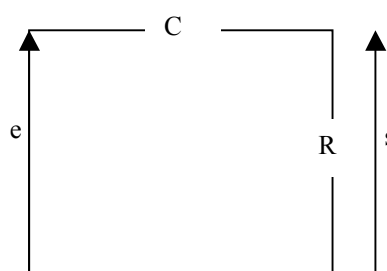
$$H = \prod_i H_i \quad G = \prod_i G_i \quad \varphi = \prod_i \varphi_i$$

Il suffit donc d'étudier les fonctions de transfert d'ordre 1 et 2. Les filtres d'ordres supérieurs seront considérés comme des « cascades » de filtres d'ordre 1 ou 2.

2 Filtre du premier ordre



Passe bas



Passe haut

2.1 Passe-bas d'ordre 1

En régime sinusoïdal forcé

$$H(j\omega) = \frac{s}{e} \cdot \frac{1}{jC\omega \left(R + \frac{1}{jC\omega} \right)} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Soit en posant $x = RC\omega$,

$$H = \frac{1}{1 + jx}$$

Le gain en décibel est donné par

$$G_{dB} = -20 \cdot \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \right)$$

Soit

$$G_{dB} = -10 \cdot \log(1 + x^2)$$

la phase est donnée par

$$\varphi = -\arg(1 + jx)$$

Soit

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= -x \\ \varphi &\in \left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right] \end{aligned}$$

Diagrammes de Bode :

Si $x \rightarrow 0$,

$G_{dB} \rightarrow 0$ et $\log(x) \rightarrow -\infty \Rightarrow$ asymptote horizontale d'équation $G_{dB} = 0$.

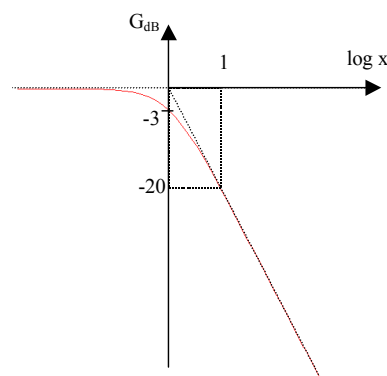
Si $x \rightarrow \infty$,

$G_{dB} \rightarrow -\infty$ et $\log(x) \rightarrow \infty$

$G_{dB} \approx -20 \cdot \log x$

$\Rightarrow$ asymptote oblique passant par l'origine de pente -20 dB par décade

Remarque : si $x = 1$, $\log(x) = 0$ et $G = -3$ dB.

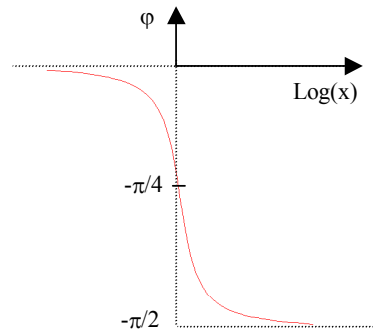


Si $x \rightarrow 0$,

$\log(x) \rightarrow -\infty$, $\tan \varphi = 0$ et $\varphi = 0$

Si $x \rightarrow \infty$

$\log(x) \rightarrow \infty$, $\tan \varphi = -1$ et $\varphi = -\pi/4$



Passe bas d'ordre 1 :

Fonction de transfert $\underline{H} = \frac{A_0}{1 + jx}$ ($A_0 \in \mathbb{R}$)

Si $x = 0$, $\underline{H} = A_0$

Si $x \rightarrow \infty$, $G_{dB} = -20 \cdot \log x$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ($A_0 > 0$)

2.2

Passe-haut d'ordre 1

En régime sinusoïdal forcé,

$$H = \frac{s}{e} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

En posant $x = RC\omega$,

$$H = \frac{jx}{1 + jx}$$

Le gain en décibel est donné par

$$G_{dB} = 20 \cdot \log \left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right)$$

Soit

$$G_{dB} = 20 \cdot \log x - 10 \cdot \log(1 + x^2)$$

La phase φ est donnée par

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arg(1 + jx)$$

$$\varphi_{\text{passe haut}} = \pi/2 + \varphi_{\text{passe bas}}$$

Diagrammes de Bode :

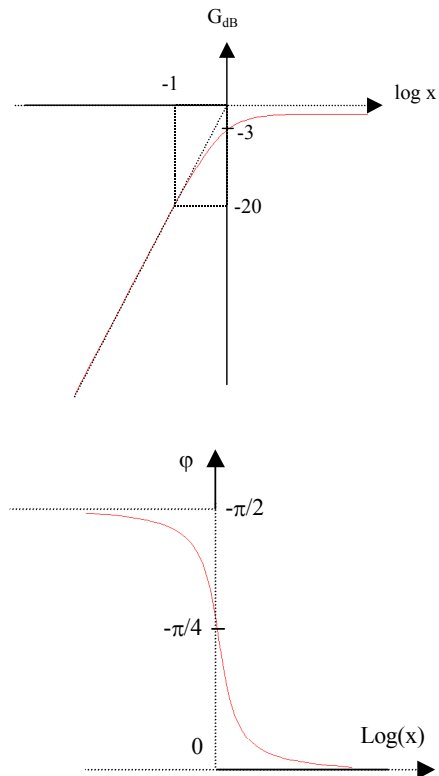
Si $x = 0$,

$G_{dB} \rightarrow -\infty$ et $\log(x) \rightarrow -\infty$ } $\Rightarrow$ asymptote oblique passant par l'origine de pente +20 dB par décade

$$G_{dB} \approx 20 \cdot \log x$$

Si $x \rightarrow \infty$,

$$G_{dB} \rightarrow 0 \text{ et } \log(x) \rightarrow \infty$$

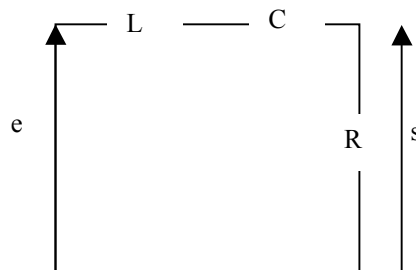


Pour un passe haut d'ordre 1,

$$\underline{H} = A_0 \cdot \frac{jx}{1 + jx}$$

3 Filtre du deuxième ordre

3.1 Passe-bande d'ordre 2



En régime sinusoïdal forcé,

$$H = \frac{s}{e} = \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{jL\omega}{R} + \frac{1}{jRC\omega}}$$

On pose

$$- LC\omega_0^2 = 1$$

$$- x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$- Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R}$$

Soit

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

Le gain en décibel est donné par

$$G_{dB} = -10 \cdot \log \left(1 + Q^2 \cdot \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right)$$

Si on change x en $1/x$, $\log(x)$ devient $-\log(x)$ et G_{dB} est inchangé. Donc $G_{dB}(\log x)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $\log(x) = 0$. Il suffit donc d'étudier G_{dB} sur l'intervalle $x \in [0,1]$.

Diagramme de Bode :

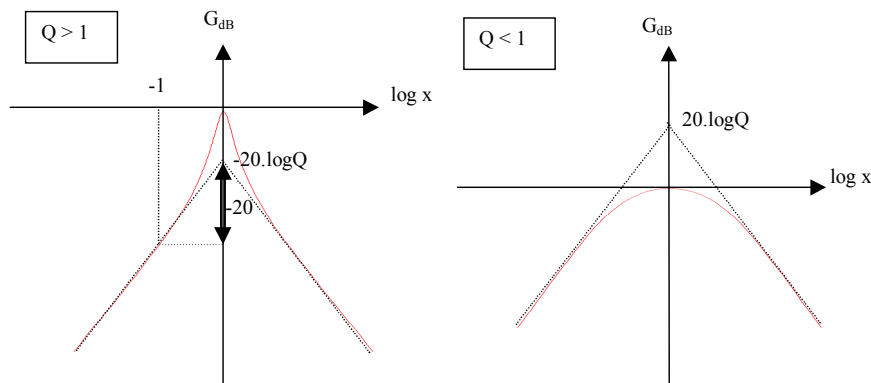
Si $x = 0$,

$$\log(x) \rightarrow -\infty$$

$$H \approx \frac{x}{Q}$$

$$G_{dB} \approx 20 \cdot \log \frac{x}{Q} = 20 \cdot \log x - 20 \cdot \log Q$$

La courbe admet une asymptote oblique de pente 20dB par décade et d'ordonnée à l'origine $-20 \cdot \log Q$.



Recherche de la bande passante à -3 dB :

L'indice c est attribué aux grandeurs (fréquence, pulsation, x , ...) de coupure

$$G_{\max} = 0 \Rightarrow G(x_c) = -3 \text{ dB}$$

$$H(x_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Remarque : } 20 \cdot \log(1/\sqrt{2}) = -3 \text{ dB}$$

En développant les calculs, il vient

$$Q^2 \left(x_c - \frac{1}{x_c} \right)^2 = 1$$

$$Q \left(x_c - \frac{1}{x_c} \right) = \pm 1$$

$$x_c - \frac{1}{x_c} \pm \frac{1}{Q} = 0$$

$$x_c^2 \pm \frac{x_c}{Q} - 1 = 0$$

Les deux fréquences de coupure correspondent à la racine positive de ces deux équations du second degré.

$$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0$$

Seules compte les fréquences de coupures positives. Les deux fréquences de coupures solutions de l'équation sont :

$$\boxed{\begin{aligned} x_{1c} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4.Q^2}}{2.Q} \\ x_{2c} &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4.Q^2}}{2.Q} \end{aligned}}$$

Par symétrie de la courbe, on doit pouvoir vérifier que $\log x_{1c} = -\log x_{2c}$, soit $x_{1c} . x_{2c} = 1$.

Or

$$x_{1c} . x_{2c} = \frac{1 + 4.Q^2 - 1}{4.Q^2} = 1$$

Définition du facteur de qualité d'une bande passante :

$$\frac{\omega_0}{|\omega_{2c} - \omega_{1c}|} = \frac{1}{|x_{2c} - x_{1c}|} = Q$$

Diagramme de phase :

La phase est donnée par

$$\varphi = -\arg \left(1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right) \right)$$

Soit

$$\boxed{\begin{aligned} \tan \varphi &= Q \left(\frac{1}{x} - x \right) \\ \cos(\varphi) &> 0 \Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned}}$$

Si on change x en $1/x$, $\log x$ est changé en $-\log x$, $\tan \varphi$ en $-\tan \varphi$ et φ en $-\varphi$. La courbe $\varphi(\log x)$ a l'origine pour centre de symétrie.

Si $x = 0$,

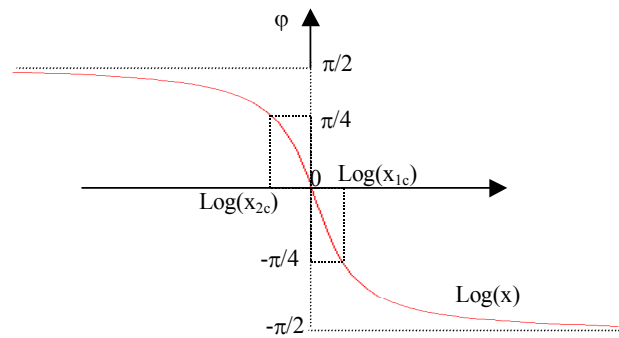
$$\tan \varphi \rightarrow \infty \text{ et } \varphi = \pi/2$$

Si $x = 1$

$$\tan \varphi = 0, \varphi = 0$$

Si $x = x_{ic}$

$$\tan \varphi = \pm 1, \text{ soit } \varphi = \pm \pi/4$$

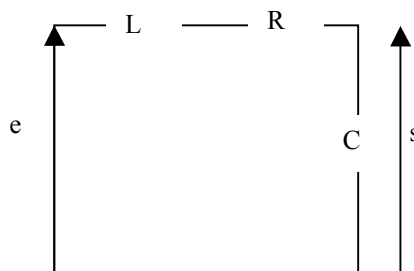


Pour un passe bande d'ordre 2,

$$\underline{H} = \frac{A_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

3.2

Passe-bas d'ordre 2



En régime sinusoïdal forcé,

$$H = \frac{s}{e} = \frac{1}{jC\omega\left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right)} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

On pose

$$- LC\omega_0^2 = 1$$

$$- x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$- Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R}$$

Soit

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$$

Le gain en décibel est donné par

$$G_{dB} = -10 \cdot \log\left((1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}\right)$$

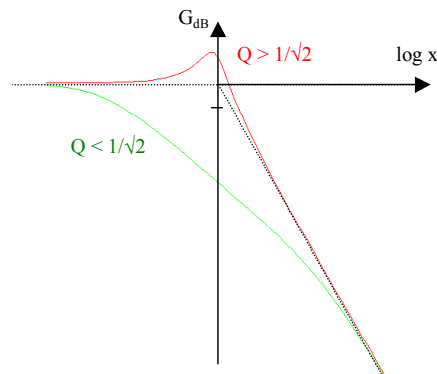
Diagrammes de Bode :

Si $x = 0$,

$G_{dB} = 0$ et $\log x \rightarrow -\infty \Rightarrow$ Ceci correspond à une asymptote horizontale en $G_{dB} = 0$ dB

Si $x \rightarrow \infty$,

$H \approx \frac{1}{x^2}$ soit $G_{dB} \approx -40 \cdot \log x \Rightarrow$ asymptote oblique de pente -40 dB par décade passant par l'origine.



Remarque : Si $x = 1$, $\log(x) = 0$ et $G_{dB} = 20 \cdot \log(Q)$

Le gain en dB est maximum si $y = (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$ est minimum.

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x \cdot \left(-2 + 2 \cdot x^2 + \frac{1}{Q^2} \right)$$

Le gain H est maximum si

$$-2 + 2 \cdot x^2 + \frac{1}{Q^2} = 0$$

$$x^2 = 1 - \frac{1}{2 \cdot Q^2}$$

On remarque que H et G_{dB} passent par un maximum si $1 - \frac{1}{2 \cdot Q^2} > 0$, soit

$$\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Remarque :

- pour le maximum, $x < 1$, soit $\log(x) < 0$
- Pour ce filtre, la pulsation de coupure ω_c est telle que

$$H(\omega_c) = \frac{H(0)}{\sqrt{2}}$$

$$\text{et non } H(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

La phase est donnée par

$$\tan \varphi = \frac{x}{Q.(x^2 - 1)} = \frac{1}{Q.\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

et $\sin(-\varphi) > 0$, soit

$$\varphi \in [-\pi, 0]$$

Si on change x en $1/x$, $\log(x)$ est changé en $-\log(x)$, et φ en $-\pi - \varphi$. La courbe $\varphi(\log x)$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(\log x = 0, \varphi = -\pi/2)$.

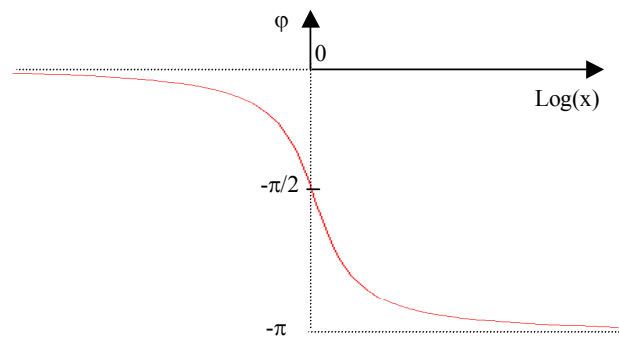
Si $x \rightarrow 0$,

$$\log x \rightarrow -\infty \text{ et } \varphi \rightarrow 0$$

Si $x \rightarrow \infty$,

$$\log x \rightarrow \infty \text{ et } \tan \varphi \approx \frac{1}{Q.x} > 0$$

$$\varphi = -\pi$$

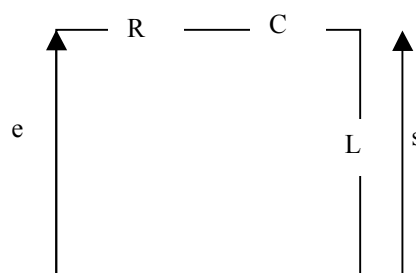


Pour un passe bas d'ordre 2,

$$\underline{H} = \frac{A_0}{1 + j.\frac{x}{Q} - x^2}$$

3.3

Passe-haut d'ordre 2



En régime sinusoïdal forcé,

$$H = \frac{s}{e} = \frac{jC\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{jL\omega} - \frac{1}{LC\omega^2}}$$

On pose

$$- \quad LC\omega_0^2 = 1$$

$$\begin{aligned}
 - \quad x &= \frac{\omega}{\omega_0} \\
 - \quad Q &= \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R}
 \end{aligned}$$

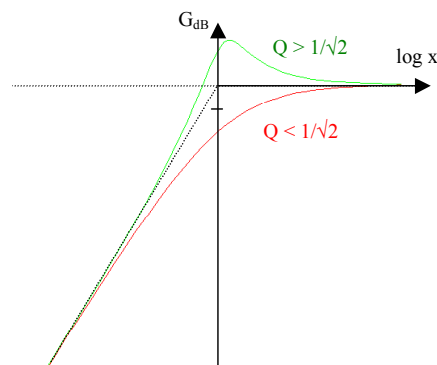
Soit

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - j\frac{1}{Qx} - \frac{1}{x^2}}$$

En notant H_1 le gain en amplitude du passe bas d'ordre 2, et H_2 celui du passe haut d'ordre 2, on obtient

$$H_1(x) = H_2(1/x) \Rightarrow G_2(\log x) = G_1(\log(1/x))$$

Les courbes $G_1(\log x)$ et $G_2(\log x)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.



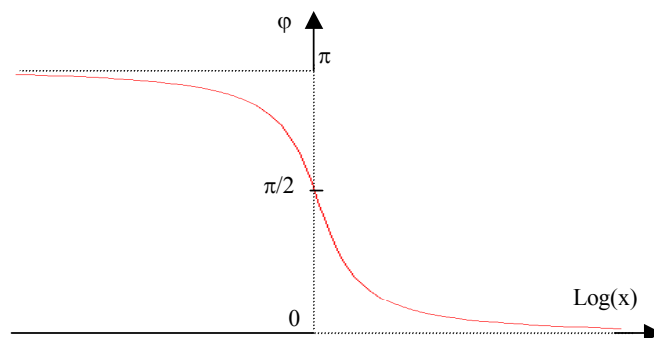
La phase est donnée par

$$\tan \varphi = \frac{x}{Qx(1 - \frac{1}{x^2})} = \frac{1}{Q(x - \frac{1}{x})}$$

et $\sin(-\varphi) < 0$, soit

$$\varphi \in [0, \pi]$$

La courbe $\varphi(\log x)$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(\log x = 0, \varphi = \pi)$.

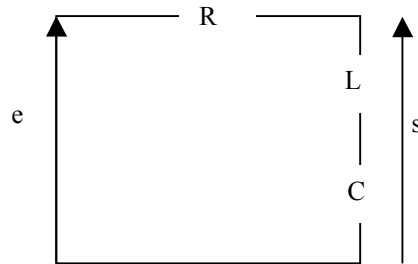


Pour un passe haut d'ordre 2,

$$\underline{H} = \frac{-A_0 \cdot x^2}{1 + j \cdot \frac{x}{Q} - x^2}$$

3.4

Filtre réjecteur de fréquence



En régime sinusoïdal forcé,

$$H = \frac{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = \frac{1 - LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Soit en utilisant les notations habituelles,

$$H = \frac{1 - x^2}{1 + j \frac{x}{Q} - x^2}$$

On pose

$$H_1 = \frac{1}{1 + j \frac{x}{Q} - x^2} \text{ (passe bas d'ordre 2)}$$

$$H_2 = 1 - x^2$$

Ainsi, $H = H_1 \cdot H_2$.

Si $x = 0$,

$$H_2 = 1, G_2 = 0\text{dB}$$

Si $x \rightarrow \infty$,

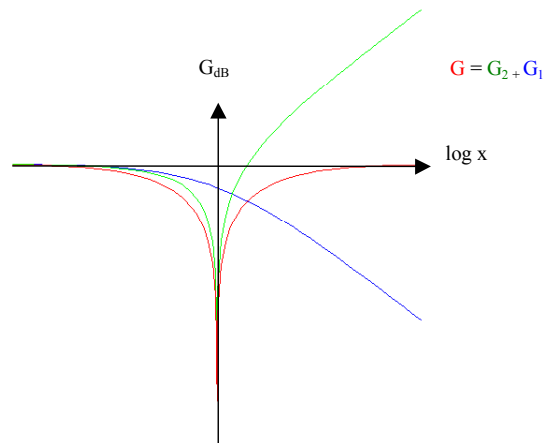
$$H_2 \approx x^2 \text{ soit } G_2 = 40 \cdot \log x.$$

Ceci correspond à une asymptote oblique de pente 40 dB par décade passant par l'origine.

Si $x = 1$,

$$H_2 = 0, G_2 \rightarrow -\infty.$$

Ceci correspond à une asymptote verticale en $\log x = 0$.

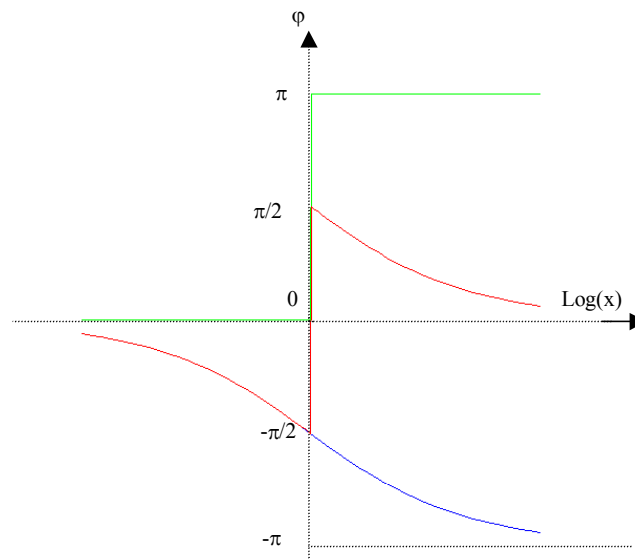


Pour la phase,

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \text{ où } \varphi_2 = \arg(1 - x^2) \in [0, \pi]$$

$$\text{si } 0 < x < 1, \varphi_2 = 0$$

$$\text{si } x > 1, \varphi_2 = \pi$$



4 Quelques remarques sur les diagrammes de Bode

La fonction $\varphi(\log \omega)$ ne peut être discontinue qu'en un point où $H = 0$; si on trouve le contraire, il faut chercher l'erreur.

Dans la plupart des cas, φ est une fonction décroissante de ω .

- Si le filtre est d'ordre 1, l'amplitude de décroissance de φ est $\pi/2$
- Si le filtre est d'ordre 2, l'amplitude de décroissance de φ est π

Si on trouve autre chose, il faut chercher une éventuelle erreur.

- Pour un filtre d'ordre 1, $G_{dB}(\log \omega)$ a une asymptote de pente ± 20 dB/décade
- Pour un filtre d'ordre 2, $G_{dB}(\log \omega)$ a une asymptote de pente ± 40 dB/décade ou bien deux asymptotes de pentes $+$ et $- 20$ dB/décade (en tout ça fait 40 !)

Le réjecteur de fréquence est un cas à part.

Il est toujours bon de prévoir le type (passe bas, passe bande, passe haut, ...) et l'ordre d'un filtre avant de commencer tout calcul de fonction de transfert (en particulier à l'oral)

Conclusion :

Un filtre linéaire atténue ou amplifie chacune des fréquences présentes dans un signal d'entrée ; il peut donc modifier la forme d'un signal (un signal sinusoïdal à l'entrée sera toujours sinusoïdal à la sortie mais un signal créneau à l'entrée peut devenir triangulaire à la sortie).

Un filtre linéaire modifie les amplitudes et les phases du spectre du signal d'entrée ; il peut faire disparaître certaines fréquences ; mais un filtre linéaire ne peut enrichir ce spectre de nouvelles fréquences.

Chapitre VIII L'amplificateur opérationnel

1 Caractéristiques

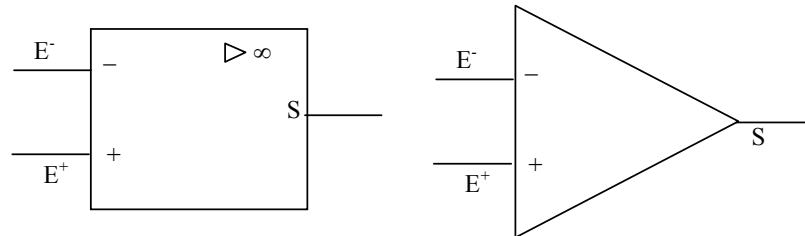
1.1 Description

Un amplificateur opérationnel (AO) possède essentiellement 5 bornes :

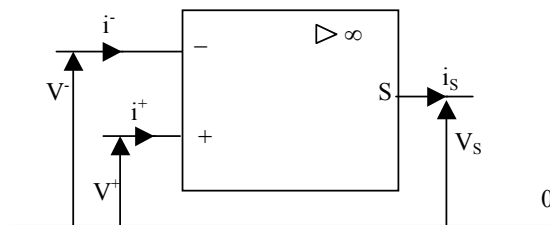
- 2 bornes pour l'alimentation $-V_a = -15\text{ V}$ et $+V_a = +15\text{ V}$
- 2 entrées
 - l'entrée dite inverseuse E^- de potentiel V^-
 - l'entrée dite non inverseuse E^+ de potentiel V^+
- 1 sortie S de potentiel V_s

Dans le schéma de l'AO, on ne représente jamais l'alimentation, mais il ne faut pas oublier qu'elle doit exister.

Les potentiels sont mesurés à partir du point milieu de l'alimentation $\pm 15\text{ V}$.



1.2 Impédance d'entrée et de sortie



Les impédances d'entrée $\frac{V^+}{i^+}$ et $\frac{V^-}{i^-}$ sont de l'ordre de $10^8\ \Omega$. (i^+ et i^- sont très faibles)

L'impédance de sortie $\frac{V_s}{i_s}$ est de l'ordre de quelques ohms à quelques $10\ \Omega$.

Le courant de sortie est limité : $|i_s| < i_{\max} \approx 20\text{ mA}$

1.3 Fonction de transfert

On pose $\varepsilon = V^+ - V^-$.

En régime sinusoïdal forcé de fréquence ν , $\underline{\mu} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{\varepsilon}}$ est appelé fonction de transfert de l'AO :

$$\underline{\mu} = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\nu}{\nu_0}}$$

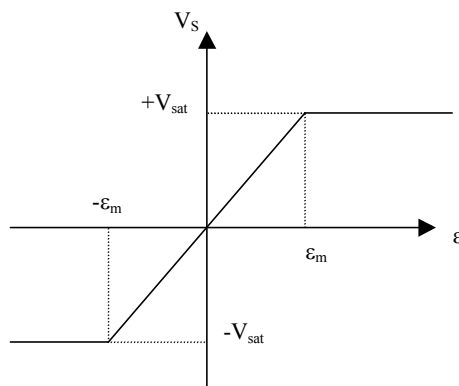
L'AO est donc un passe bas d'ordre 1.

μ_0 est l'amplification en continu, sa valeur est typiquement 10^5 .

ν_0 est la fréquence de coupure, sa valeur est typiquement de 10 Hz.

La tension de sortie est limitée : $|V_S| < V_{sat} \approx V_a = 15 \text{ V}$

En régime continu,



Si $-\varepsilon_m < \varepsilon < \varepsilon_m$ alors $V_S = \mu_0 \cdot \varepsilon$ avec $\mu_0 \approx 10^5$

Si $\varepsilon < -\varepsilon_m$ alors $V_S = -V_{sat}$

Si $\varepsilon > +\varepsilon_m$ alors $V_S = +V_{sat}$

Où $\varepsilon_m = \frac{V_{sat}}{\mu_0} \approx 1,5 \times 10^{-4} \text{ V}$

La tension de sortie ne peut varier infiniment rapidement : $\left| \frac{dV_S}{dt} \right|$ est limité par une valeur σ appelée « slew rate » de l'AO. σ est typiquement de l'ordre de $0,5 \text{ V}/\mu\text{s}$

1.4

Amplificateur opérationnel idéal

Dans de très nombreux montages, on pourra utiliser un modèle simplifié d'AO appelé AO idéal. L'impédance d'entrée sera considérée comme infinie (au lieu de $10^8 \Omega$) ; les courants d'entrée i^+ et i^- sont alors nuls.

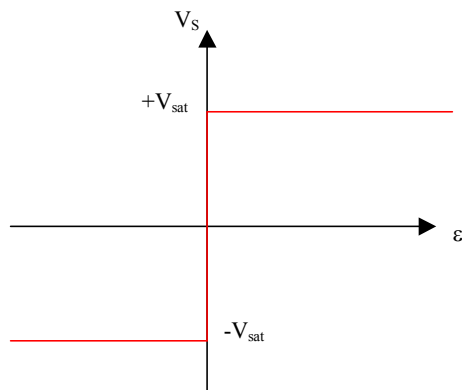
$$i^+ = i^- = 0$$

Le coefficient d'amplification μ_0 sera considéré comme infini (au lieu de 10^5) ; la tension ε_m est alors nulle

Si $-V_{sat} < V_S < V_{sat}$ alors $\varepsilon = 0$ et le régime est dit linéaire

Si $\varepsilon < 0$ alors $V_S = -V_{sat}$
 Si $\varepsilon > 0$ alors $V_S = +V_{sat}$ est le régime est dit saturé

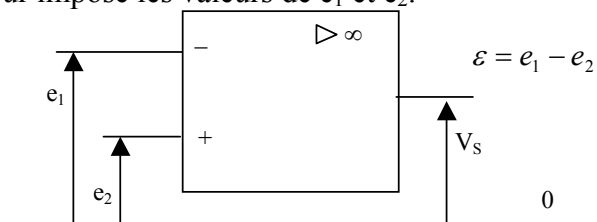
Dans la suite du cours, sauf avis contraire, les AO seront supposés idéaux.



2 Régime saturé

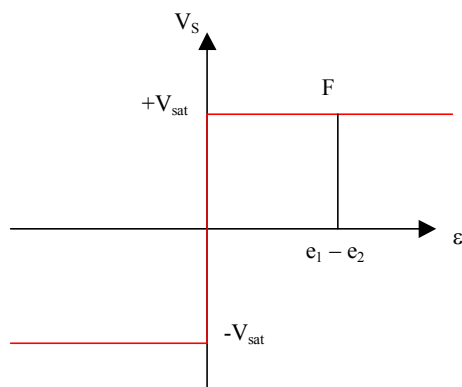
2.1 Comparateur

Le circuit extérieur impose les valeurs de e_1 et e_2 .



$$V_S = +V_{sat} \text{ si } e_1 > e_2$$

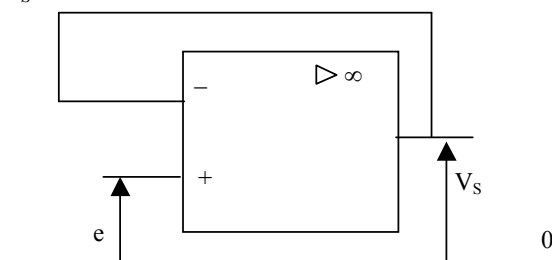
$$V_S = -V_{sat} \text{ si } e_2 > e_1$$



Le signe de V_S permet de comparer e_2 et e_1 , d'où le nom de montage comparateur.

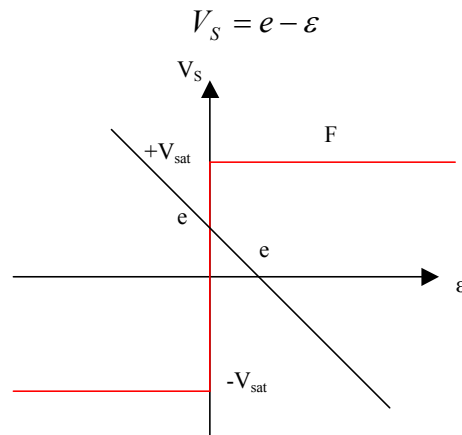
2.2 Suiveur

Le circuit impose $V_S = V^-$ et $V^+ = e$.



$$\varepsilon = V^+ - V^- = e - V_s$$

Soit



Si $-V_{sat} < e < V_{sat}$ alors le point de fonctionnement est dans le domaine linéaire, soit

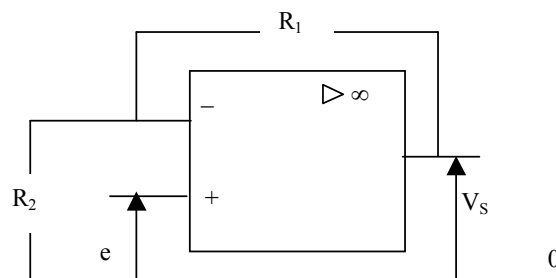
$$\boxed{\begin{array}{l} V_s = e \\ \varepsilon = 0 \end{array}}$$

$V_s = e$ d'où le nom de montage inverseur.

Lorsqu'il existe une liaison entre la sortie et l'entrée E^- , on pourra supposer que l'AO fonctionne en régime linéaire, et donc que $\varepsilon = 0$. Mais il faudra vérifier que $|V_s|$ est bien inférieure à V_{sat} . Dans le cas contraire, l'AO fonctionne en régime saturé.

3 Montages linéaires : les montages de base

3.1 Amplificateur non inverseur



Il existe une liaison entre S et E^- , on suppose donc que l'AO fonctionne en régime linéaire ($\varepsilon = 0$ car l'AO est idéal).

$$V^+ = V^- = e$$

On suppose l'AO idéal, donc $i^+ = i^- = 0$; on peut donc écrire un diviseur de tension pour R_1 et R_2 :

$$\boxed{V_s = e \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2} = e \cdot \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right)}$$

Les caractéristiques de ce filtre sont :

$$H = 1 + \frac{R_1}{R_2}$$

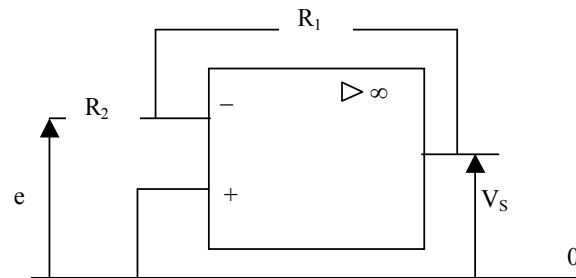
$$G_{dB} = Cte$$

$$\varphi = 0$$

Remarque : Si $R_1 = 10\text{ k}\Omega$, $R_2 = 1\text{ k}\Omega$ et $e = 5\text{ V}$ alors $V_s \neq 55\text{ V}$ car $V_s > V_{sat} \approx 15\text{ V}$

Ici, il n'y a pas de gain car le régime est non linéaire.

3.2 Amplificateur inverseur



Il existe une liaison entre S et E^- , on suppose donc que l'AO fonctionne en régime linéaire ($\varepsilon = 0$ car l'AO est idéal).

$$V^+ = V^- = 0$$

On suppose l'AO idéal, donc $i^+ = i^- = 0$; on peut donc écrire un diviseur de tension pour R_1 et R_2 :

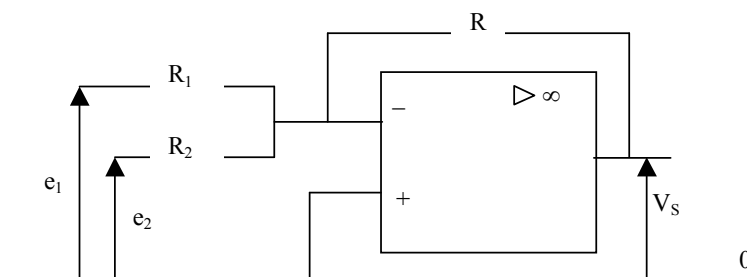
$$V_s = -\frac{R_1}{R_2} \cdot e$$

Les caractéristiques de ce filtre sont :

$$H = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\varphi = \pi$$

3.3 Additionneur



S est relié à E^- , on suppose $\varepsilon = 0$

$$V^+ = V^- = 0$$

L'AO est idéal, donc $i^- = 0$. On peut écrire le théorème de Millman en E^- .

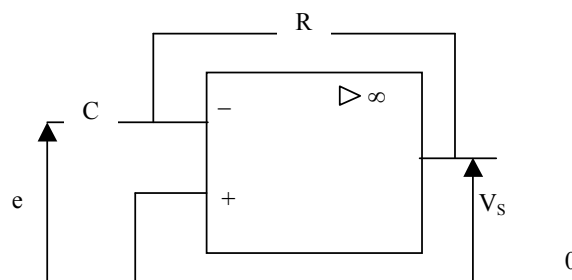
$$V^- = 0 = \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{V_s}{R}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R}}$$

Soit

$$V_s = -R \left(\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} \right)$$

3.4

Dérivateur



S est relié à E^- , on suppose $\varepsilon = 0$

$$V^+ = V^- = 0$$

L'AO est idéal, donc $i^- = 0$. On peut écrire un diviseur de tension en régime sinusoïdal forcé.

$$V_s = -jRC\omega e$$

Soit en régime quelconque

$$V_1 = -RC \frac{de}{dt}$$

En posant $x = RC\omega$, on peut établir les caractéristiques de ce filtre

$$H(j\omega) = -jx$$

$$G_{dB} = 20 \cdot \log x$$

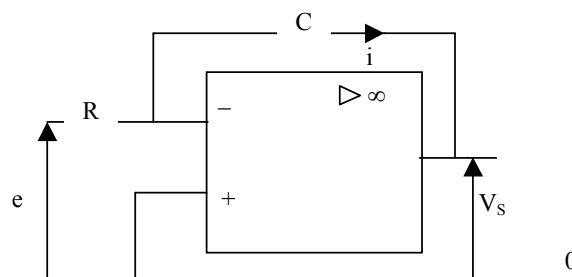
$$\varphi = -\pi/2$$

Pour les basses fréquences, ce diagramme de Bode est identique à celui d'un passe haut d'ordre 1 ou un passe bande d'ordre 2. Donc pour les basses fréquences, ces deux filtres se comportent comme des dérivateurs.

Par exemple, si on applique en entrée un signal triangulaire, on a en sortie un signal créneau.

3.5

Intégrateur



Avec les hypothèses habituelles,

$$i = \frac{e}{R} = -C \cdot \frac{dV_s}{dt}$$

Soit

$$\frac{dV_s}{dt} = -\frac{e}{RC}$$

$$V_s(t) - V_s(0) = -\frac{1}{RC} \int_0^t e \cdot dt'$$

$V_s(t)$ est une primitive de $e(t)$, d'où le nom de montage intégrateur.

Les caractéristiques de ce filtre sont, en posant $x = RC\omega$

$$H(j\omega) = \frac{j}{x}$$

$$G_{dB} = -20 \cdot \log x$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

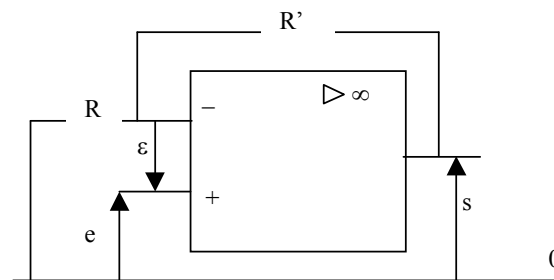
Attention : dans les basses fréquences, le gain est très grand. Il faut voir si l'AO ne sature pas, sinon le régime n'est pas linéaire.

Pour les hautes fréquences, ce diagramme de Bode est équivalent à celui d'un passe haut d'ordre 1 ou d'un passe bande d'ordre 2. Pour les hautes fréquences, ces deux filtres se comportent comme des intégrateurs.

Par exemple, pour un signal en créneau en entrée, on obtient un signal triangulaire en sortie.

4 Stabilité du régime linéaire

4.1 Rétroaction sur E



Pour étudier la stabilité du régime linéaire, on doit écrire l'équation différentielle liant les variations de $s(t)$ et $e(t)$. On doit donc utiliser la fonction de transfert de l'AO non idéal.

$$s = \varepsilon \cdot \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\nu}{\nu_0}}$$

On peut déterminer facilement

$$V^+ = e$$

$$V^- = \frac{R}{R + R'} \cdot s$$

On pose $G_0 = \frac{R + R'}{R}$.

On suppose toujours que les impédances d'entrée de l'AO sont infinies, donc $i^+ = i^- = 0$.

$$\varepsilon = e - \frac{s}{G_0}$$

D'où

$$s = \left(e - \frac{s}{G_0} \right) \cdot \frac{\mu_0}{1 + j \cdot \frac{\nu}{\nu_0}}$$

Après calcul, il vient en régime forcé

$$s \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{G_0} + j \frac{\omega}{\mu_0 \cdot \omega_0} \right) = e$$

Soit en régime quelconque

$$\left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{G_0} \right) s + \frac{1}{\mu_0 \cdot \omega_0} \cdot \frac{ds}{dt} = e$$

Donc le régime forcé est > 0 > 0 stable.

Remarque :

$$\frac{s}{e} = \frac{1}{\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{G_0} + j \frac{\omega}{\mu_0 \cdot \omega_0}} = H(j\omega)$$

Soit

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{G_0} \right)^2 + \left(\frac{\nu}{\mu_0 \cdot \nu_0} \right)^2}}$$

μ_0 est de l'ordre de 10^5 , $G_0 \ll \mu_0$.

On cherche la valeur de ν_c , fréquence de coupure à $-3dB$

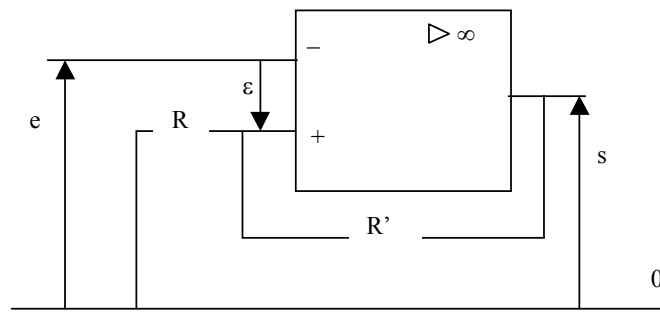
$$H = \frac{G_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu \cdot G_0}{\mu_0 \cdot \nu_0} \right)^2}}$$

$$\text{Ainsi } H(\nu_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{G_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{G_0 \cdot \nu_c}{\mu_0 \nu_0} = 1$$

Soit

$$G_0 \nu_c = \mu_0 \nu_0 = Cte \approx 10^6 \text{ Hz}$$

4.2 Rétroaction sur E^+



Si on suppose que l'AO est en régime linéaire et est idéal,

$$V^+ = V^- = e$$

Soit

$$s = \frac{R + R'}{R} \cdot V^+ = G_0 \cdot e$$

Etude de la stabilité de ce régime linéaire :

On établit l'équation différentielle liant s et e , l'AO n'étant plus idéal.

$$i^+ = i^- = 0$$

$$s = \varepsilon \cdot \frac{\mu_0}{1 + j \cdot \frac{\nu}{\nu_0}}$$

On a

$$V^- = e$$

$$V^+ = \frac{R}{R + R'} \cdot s = \frac{s}{G_0}$$

Après calcul, on obtient donc en régime sinusoïdal forcé

$$s = \left(\frac{1}{\mu_0} + j \cdot \frac{\nu}{\mu_0 \nu_0} - \frac{1}{G_0} \right) = -e$$

Soit en régime quelconque

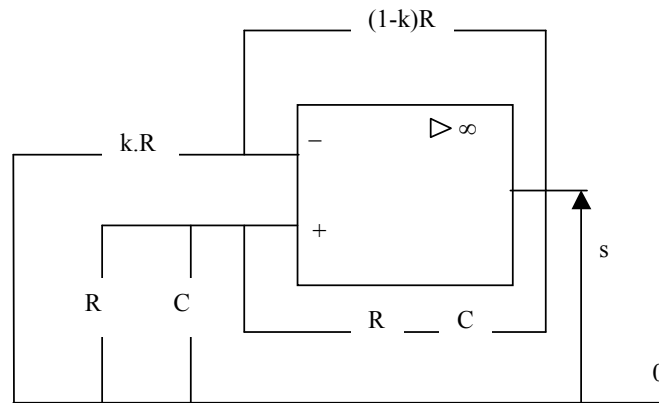
$$\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{G_0} \right) \cdot s + \frac{1}{\mu_0 \cdot \nu_0} \cdot \frac{ds}{dt} = -e$$

$\downarrow$
 < 0

$\downarrow$
 > 0

Les coefficients de s et ds/dt sont de signes contraires, donc le régime linéaire est instable. L'AO ne fonctionne pas en régime linéaire, mais en régime saturé (cf chapitre suivant)

4.3 Oscillateur à pont de Wien



On suppose que l'AO fonctionne en régime linéaire (rétroaction sur E⁻)

$$V^+ = V^- = k.s$$

On écrit un diviseur de tension

$$\frac{s}{R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{R}{jC\omega \left(R + \frac{1}{jC\omega} \right)}} = k.s \left(jC\omega + \frac{1}{R} \right)$$

Après calcul et arrangement de l'expression, on obtient en régime sinusoïdal forcé

$$s \left(1 + jRC\omega \left(3 - \frac{1}{k} \right) - R^2 C^2 \omega^2 \right) = 0$$

Soit en régime quelconque

$$s + RC \left(3 - \frac{1}{k} \right) \frac{ds}{dt} + R^2 C^2 \frac{d^2 s}{dt^2} = 0$$

On va maintenant étudier le fonctionnement du montage selon les valeurs de k

Cas 1 : $1/k = 3$

L'équation de fonctionnement devient

$$s + R^2 C^2 \frac{d^2 s}{dt^2} = 0$$

La solution est de la forme

$$s = S \cdot \cos(\omega.t + \varphi)$$

avec $\omega = 1/RC$.

S et φ sont deux constantes d'intégration qui dépendent des conditions initiales.

Cas 2 : $3 - 1/k > 0$

$$s = 0$$

Le régime forcé est stable, il n'y a pas d'oscillations.

Cas 3 : $3 - 1/k < 0$

L'équation différentielle a des coefficients de signes différents. Donc le régime forcé est instable. Pendant le régime linéaire, s augmente ou diminue de manière exponentielle : l'AO va donc saturer.

Si l'AO est saturé, quelle est l'équation différentielle qui régit le système ?

$$s = \pm V_{sat} \text{ et } V^+ \neq V^-$$

On a

$$V^- = \pm k.V_{sat}$$

Et en écrivant un diviseur de tension

$$V^+ \cdot \left(jC\omega + \frac{1}{R} \right) = \frac{\pm V_{sat}}{R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jC\omega}}}$$

Soit après calculs et arrangement de l'expression, on obtient en régime forcé :

$$V^+ \cdot (1 + 3.jRC\omega - R^2 C^2 \omega^2) = \pm jRC\omega.V_{sat}$$

Soir en régime quelconque

$$V^+ + 3.RC \cdot \frac{dV^+}{dt} + R^2 C^2 \cdot \frac{d^2 V^+}{dt^2} = 0$$

Chapitre IX Circuits non linéaires

Nous avons déjà rencontré dans les cours précédents des composants non linéaires : diode, diode zener, AO saturé, ...

Dans un réseau comportant un ou plusieurs composants non linéaires, les équations régissant les variations des courants et des tensions ne sont plus linéaires à coefficients constants. Ceci a deux conséquences essentielles :

- Le théorème de superposition n'est plus applicable
- La réponse à un signal sinusoïdal n'est plus sinusoïdale de même pulsation

Il y a donc enrichissement du spectre du signal.

Nous allons dans ce chapitre étudier quelques exemples de circuits à composant(s) non linéaire(s), montrer leur utilité ainsi que l'enrichissement du spectre.

1 Analyse spectrale d'un signal périodique

Soit $x(t)$ un signal périodique de période T . $x(t)$ est décomposable en série de Fourier :

$$x(t) = a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) + \dots + a_i \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) + \dots$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$

La **valeur moyenne** de x est

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot dt$$

Si $a_0 = 0$, la valeur moyenne de x est nulle ; on dit que x n'a pas de composante continue.

Si $a_0 \neq 0$, x a une composante continue de valeur a_0 .

La **fondamentale** est

$$a_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$$

a_1 est l'amplitude du fondamentale, et φ_1 sa phase.

L'**harmonique n°i** ($i > 1$) est

$$a_i \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

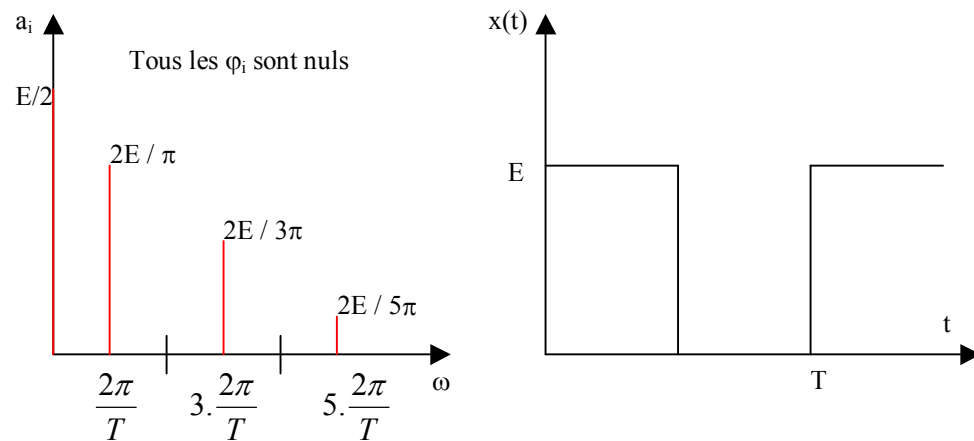
a_i est l'amplitude du fondamentale, et φ_i sa phase.

Si $i \rightarrow \infty$, $a_i \rightarrow 0$ (la série converge)

Remarque : Si le circuit est linéaire, $x(t)$ est l'entrée et $H(j\omega)$ la fonction de transfert, la sortie s'écrit :

$$s = H(0) \cdot a_0 + H(\omega) \cdot a_1 \cdot \cos[\omega t + \varphi_1 + \arg(\underline{H}(j\omega))] + H(2\omega) \cdot a_2 \cdot \cos[\omega t + \varphi_2 + \arg(\underline{H}(2j\omega))] + \dots$$

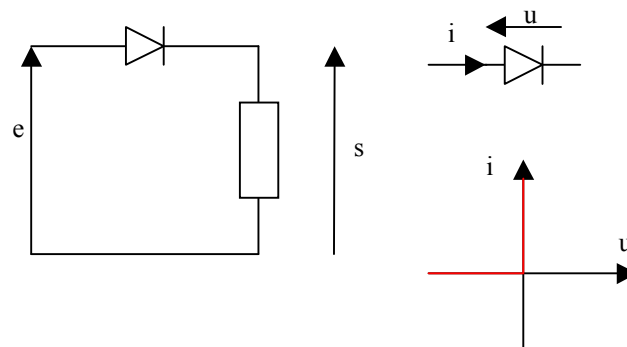
Exemple de spectre :



2 Redressement et filtrage

2.1 Redressement simple alternance

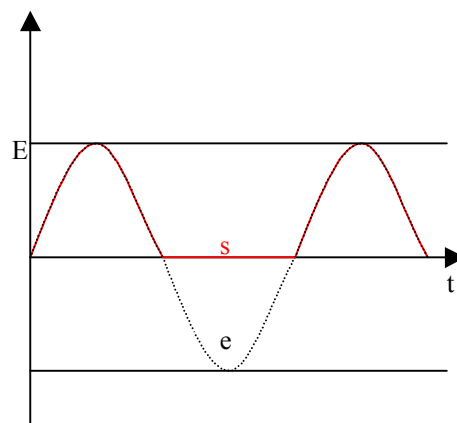
On suppose une diode idéale ($V_s = 0$ et $r_d = 0$ dans le sens passant)



On applique une tension e fonction sinusoïdale du temps. On cherche s .

Si la diode est passante : $s = e$ et $i > 0$

Si la diode est bloquée : $i = 0$ et $s = 0$
 $e < s$



A propos du spectre de s :

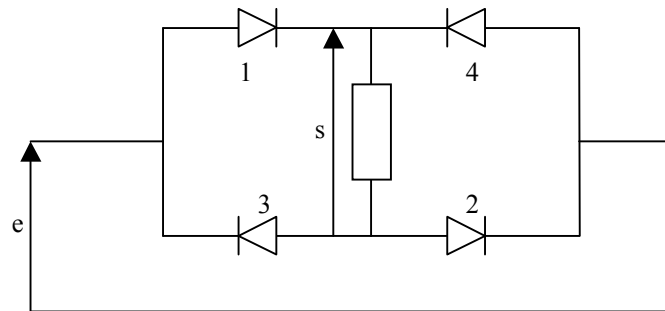
La valeur moyenne S_0 de s n'est plus nulle, il y a donc une composante continue dans le spectre de s ; il y a enrichissement du spectre.

$$S_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t).dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} E.\sin(\omega.t).dt = \frac{E}{\pi} \neq 0$$

Il y a une fondamentale de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$, mais il y a aussi des harmoniques car le signal n'a plus la forme d'une sinusoïde.

2.2

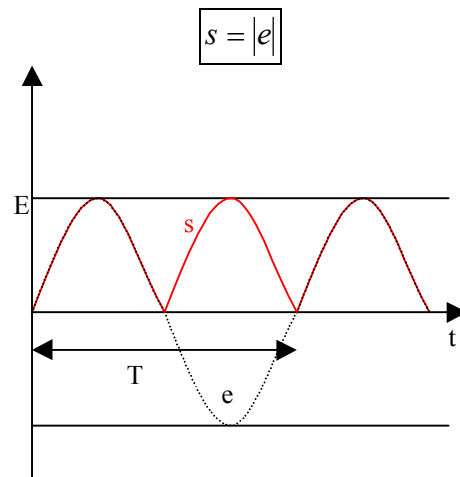
Redressement double alternance



Si $e > 0$, les diodes 1 et 2 sont passantes et $e = s$.

Si $e < 0$, les diodes 3 et 4 sont passantes et $e = -s$.

Donc



A propos du spectre de s :

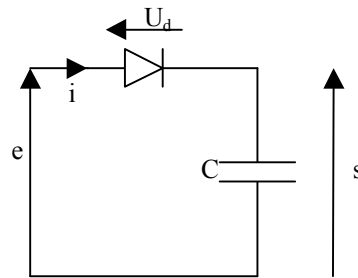
Composante continue :

$$\frac{2.E}{\pi}$$

Pulsation de la fondamentale :

$$2.\omega_0 = 2.\frac{2\pi}{T}$$

2.3 Détecteur de crête



Diode passante :

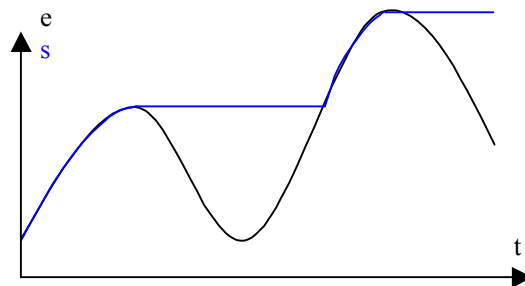
$$i > 0, U_D = 0 \text{ et } e = s$$

$$C \cdot \frac{ds}{dt} > 0, \text{ et donc } C \cdot \frac{de}{dt} > 0$$

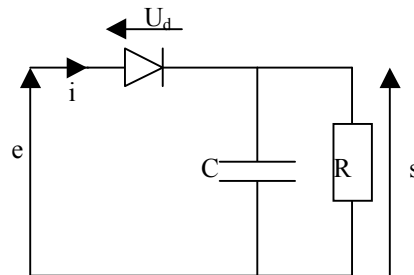
Diode bloquée :

$$i = 0, U_D < 0 \text{ et } e \neq s$$

$$\frac{ds}{dt} = 0$$



2.4 Filtrage et détecteur de crête



Lorsque la diode est passante, $i > 0$, $U_D = 0$ et $e = s$.

A travers la diode,

$$i = \frac{s}{R} + C \cdot \frac{ds}{dt}$$

Soit

$$\frac{e}{R} + C \cdot \frac{de}{dt} > 0$$

$$\boxed{C \cdot \frac{de}{dt} > -\frac{e}{R}}$$

Lorsque la diode est bloquée, $i = 0$, $U_D < 0$ et $e < s$.

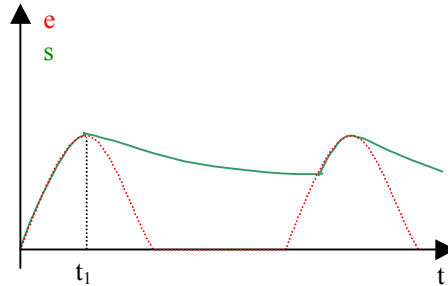
Le courant traversant la diode est nul, soit

$$\frac{s}{R} + C \cdot \frac{ds}{dt} = 0$$

Soit (t_1 est la date à partir de laquelle la diode se bloque)

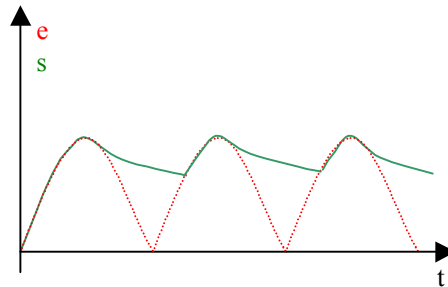
$$s = s(t_1) \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Exemple : Cas d'un redresseur simple alternance.



À $t = t_1^+$, $\frac{de}{dt} < -\frac{e}{RC}$: la diode se bloque.

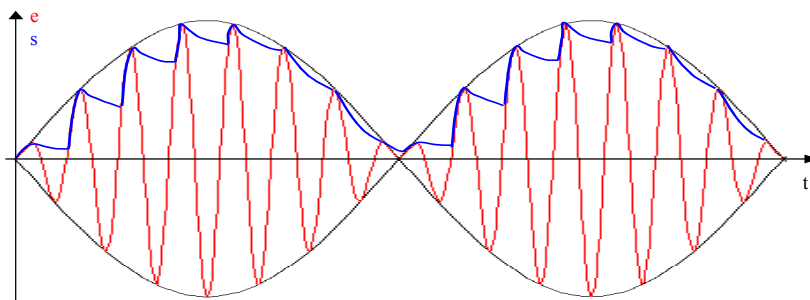
Exemple : cas d'un redresseur double alternance



$$\frac{V_{\max} - V_{\min}}{V_{\max}} \ll 1$$

On peut dire que s est quasiment continue.

Exemple : Cas d'un signal modulé



Le signal d'entrée est de la forme

$$e(t) = A \cdot \cos(\omega_2 t) \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

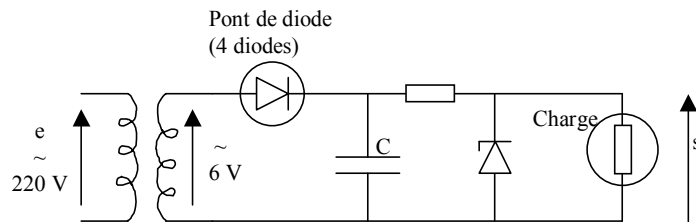
où l'indice 2 se rapporte à la modulante, et l'indice 1 à la porteuse.

Pour une bonne démodulation, il faut choisir la constante de temps RC du circuit telle que

$$T_1 \ll RC \ll T_2$$

3 Régulation d'une tension par diode Zener

Pour mieux filtrer, on peut ajouter une diode zener qui stabilise la tension de sortie.

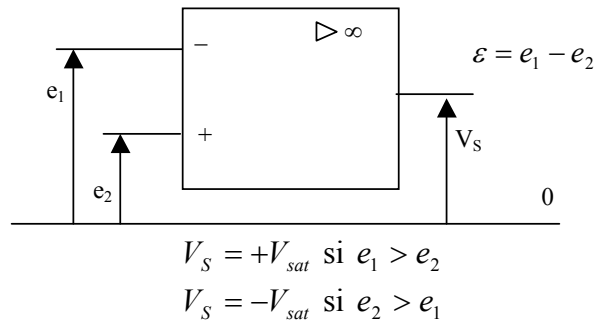


La diode zener est passante en inverse si le signal d'entrée e est positif. Si elle est idéale, la tension à ses bornes est alors $s = -V_Z$.

Voir l'exercice n°1 dans le cas où la diode zener ne serait pas idéale.

4 L'amplificateur opérationnel en régime saturé

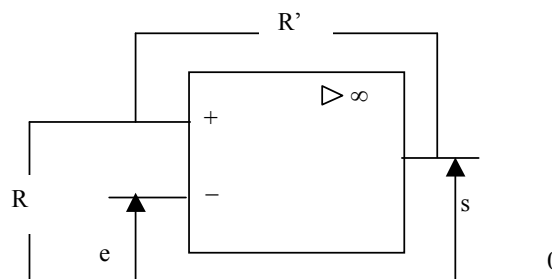
4.1 Comparateur



4.2 Comparateur à hystérésis

Il existe deux montages de comparateurs à hystérésis à base d'AO.

Premier montage :



Le circuit extérieur impose le potentiel de la borne V^- de l'AO.
Un diviseur de tension donne

$$V^+ = \frac{R}{R + R'} \cdot s$$

On pose

$$G_0 = \frac{R + R'}{R}$$

Par définition,

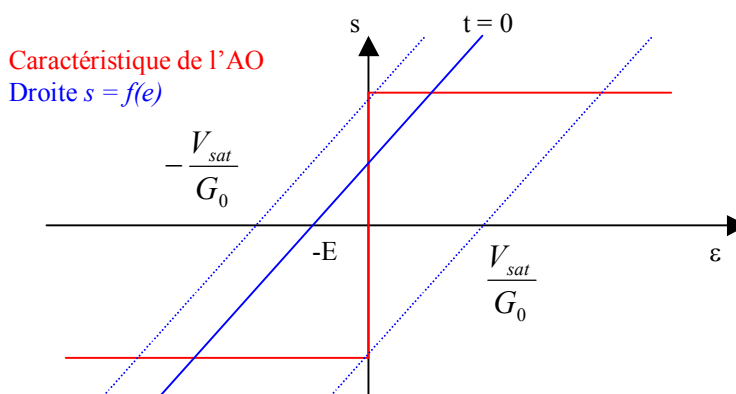
$$\varepsilon = V^+ - V^- = \frac{s}{G_0} - e$$

Soit

$$s = G_0 \cdot (\varepsilon + e)$$

La droite d'équation $s = G_0 \cdot (\varepsilon + e)$ peut couper la caractéristique de l'AO en trois points ; il y a donc trois points de fonctionnement possibles. Dans le chapitre précédent, on a montré que le fonctionnement en régime linéaire est instable, l'AO fonctionne donc en régime saturé.

On suppose que $e = E \cdot \cos(\omega \cdot t)$. La droite d'équation $s = G_0 \cdot (\varepsilon + e)$ se déplace parallèlement à elle-même. A $t = 0$, elle coupe l'axe des abscisses en $\varepsilon = -E$. Pour $t \in [0, T/2]$, cette droite se déplace de gauche à droite. Pour $t \in [T/2, T]$, cette droite se déplace de droite à gauche.



On suppose que $E > \frac{V_{sat}}{G_0}$

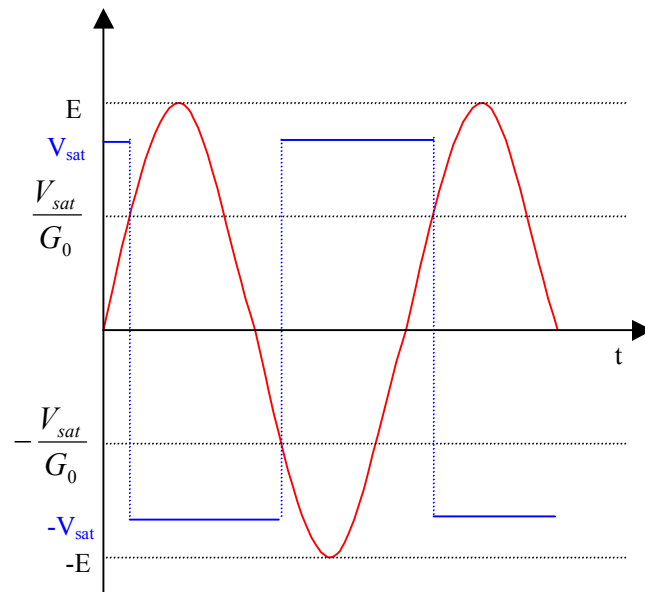
La droite d'équation $s = G_0 \cdot (\varepsilon + e)$ coupe à $t = 0$ la caractéristique de l'AO en $s = -V_{sat}$.

Tant que $-e < \frac{V_{sat}}{G_0}$ alors $s = -V_{sat}$

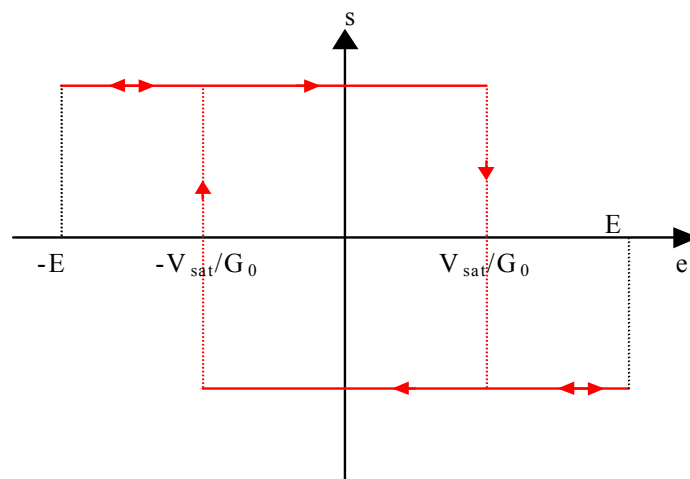
Soit $e > -\frac{V_{sat}}{G_0}$.

Pour $e < -\frac{V_{sat}}{G_0}$, alors $s = V_{sat}$

Tant que $e < \frac{V_{sat}}{G_0}$ alors $s = V_{sat}$



Le cycle d'hystérésis du comparateur est donné par le schéma suivant



Pour établir rapidement un cycle d'hystérésis, il suffit d'écrire

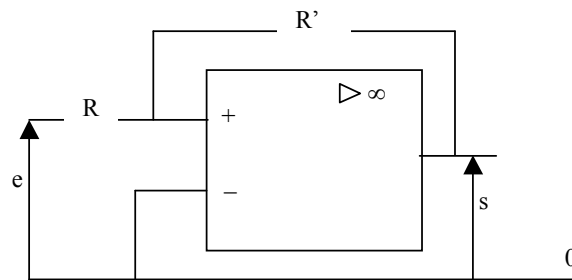
$$V^- = e$$

$$V^+ = \frac{s}{G_0}$$

Puis d'écrire

$$\begin{aligned} s = V_{sat} &\Rightarrow \varepsilon > 0 \Rightarrow e < \frac{V_{sat}}{G_0} \\ s = -V_{sat} &\Rightarrow \varepsilon < 0 \Rightarrow e > -\frac{V_{sat}}{G_0} \end{aligned}$$

Deuxième montage :



Il n'y a aucune liaison entre E^- et la sortie de l'AO : ce dernier fonctionne donc en régime saturé.

$$V^- = 0$$

$$V^+ = \frac{R' \cdot e + R \cdot s}{R + R'}$$

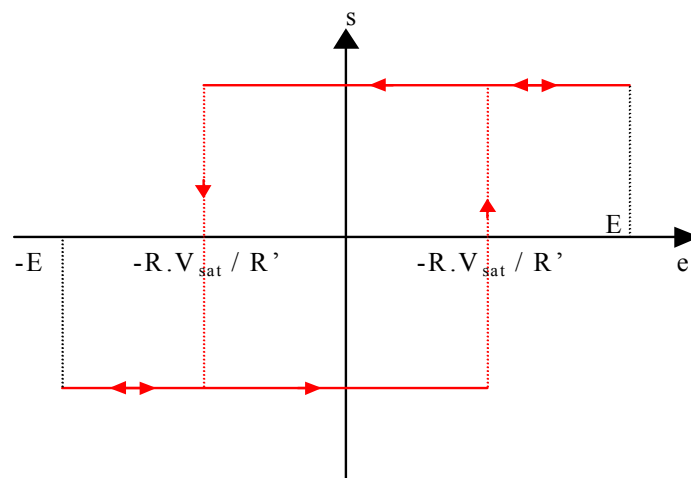
d'où

$$\varepsilon = \frac{R' \cdot e + R \cdot s}{R + R'}$$

Soit

$$\begin{aligned} s = V_{sat} &\Rightarrow \varepsilon > 0 \Rightarrow e > -\frac{R}{R'} V_{sat} \\ s = -V_{sat} &\Rightarrow \varepsilon < 0 \Rightarrow e < \frac{R}{R'} V_{sat} \end{aligned}$$

D'où le cycle d'hystérésis

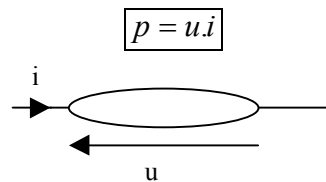


Chapitre X Puissance en régime sinusoïdal forcé

1 Puissance instantanée

1.1 Expression générale

Pour un dipôle orienté en convention récepteur, la puissance instantanée **reçue** par le dipôle est



1.2 Régime sinusoïdal forcé

Si la tension et l'intensité sont sinusoïdales,

$$i = I \cdot \cos(\omega.t)$$

$$u = U \cdot \cos(\omega.t + \varphi)$$

Soit, en fonction des valeurs efficaces,

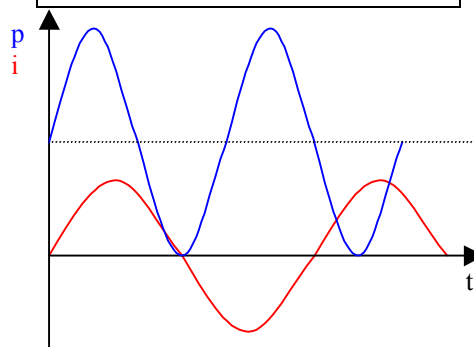
$$i = \sqrt{2} \cdot I_e \cdot \cos(\omega.t)$$

$$u = \sqrt{2} \cdot U_e \cdot \cos(\omega.t + \varphi)$$

Soit,

$$p = 2 \cdot U_e \cdot I_e \cdot \cos(\omega.t) \cdot \cos(\omega.t + \varphi)$$

$$p = U_e \cdot I_e \cdot (\cos(2 \cdot \omega.t + \varphi) + \cos \varphi)$$



2 Puissance moyenne

2.1 Définition

Si u et i sont fonctions périodiques du temps de période T , la valeur moyenne de la puissance est

$$P = \langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt$$

2.2 Régime sinusoïdal forcé

En régime sinusoïdal forcé,

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T U_e \cdot I_e \cdot (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi) \cdot dt = \frac{U_e \cdot I_e}{T} \cdot T \cdot \cos \varphi$$

Soit

$$P = U_e \cdot I_e \cdot \cos \varphi$$

Cette puissance moyenne est aussi appelée puissance active. Elle se mesure en Watt.

$U_e \cdot I_e$ est appelée puissance apparente. Elle se donne en V.A plutôt qu'en Watt.

$\cos \varphi$ est appelé facteur de puissance

2.3 Dipôle passif linéaire

Pour un dipôle linéaire passif,

$$\underline{U}_e = \underline{Z} \cdot \underline{I}_e \cdot e^{j\varphi}$$

$$U_e = Z \cdot I_e$$

Remarque :

En posant $Z = A + j \cdot B$, et vu que par définition, $Z \cdot \cos \varphi = \text{Re}(\underline{Z})$

$$Z \cdot \cos \varphi = A = \text{Re}(\underline{Z})$$

Remarque : Ici les calculs font intervenir des produits, il faut donc impérativement utiliser les valeurs réelles des grandeurs physiques plutôt que leurs valeurs complexes.

Comme nous l'avons vu plus haut,

$$P = U_e \cdot I_e \cdot \cos \varphi$$

Soit

$$P = Z \cdot I_e^2 \cdot \cos \varphi$$

Or $Z \cdot \cos \varphi = A = \text{Re}(\underline{Z})$

$$P = A \cdot I_e^2$$

Exemples de dipôles :

- Condensateur

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} \Rightarrow P = 0$$

- Inductance pure

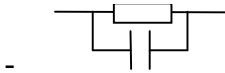
$$\underline{Z} = jL\omega \Rightarrow P = 0$$

- Résistance

$$\underline{Z} = R \Rightarrow P = R \cdot I_e^2$$

- Bobine

$$\underline{Z} = r + jL\omega \Rightarrow P = r \cdot I_e^2$$



$$\underline{Z} = \frac{R}{1 + jRC\omega} \Rightarrow A = \frac{R}{1 + R^2 C^2 \omega^2} \Rightarrow P = \frac{R I_e^2}{1 + R^2 C^2 \omega^2}$$

2.4 Dipôle RLC série

L'impédance d'un dipôle RLC série est donnée par

$$\underline{Z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

Soit

$$\text{Re}(\underline{Z}) = R \Rightarrow P = R I_e^2$$

On considère que le dipôle est alimenté par un générateur de tension efficace U_e .

- Si $L\omega = 1/C\omega$

$$\underline{Z} = R \quad \text{et} \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \quad \text{est minimum. Ainsi, } I_e = U_e / Z \quad \text{est minimum.}$$

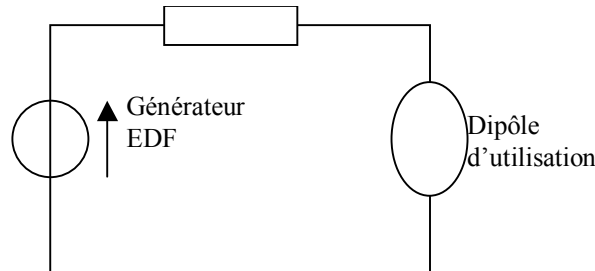
P est maximum.

- Si $\omega = \omega_{C1}$ ou $\omega = \omega_{C2}$

$$I_e(\omega_C) = \frac{I_e(\omega_0)}{\sqrt{2}} \quad \text{soit} \quad P = \frac{P_{\max}}{2}$$

3 Facteur de puissance

3.1 Importance dans la distribution industrielle



P est la puissance reçue par le dipôle ; celle qui est facturée à l'utilisateur. Nous avons vu plus tôt que

$$P = U_e \cdot I_e \cdot \cos \varphi$$

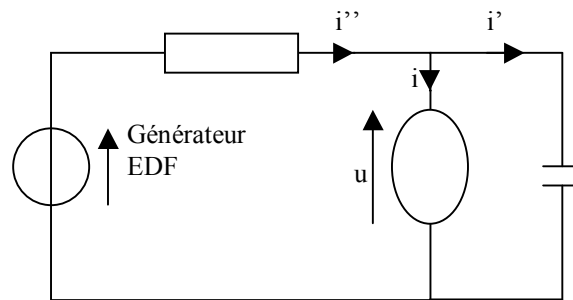
P_l est la puissance perdue dans la ligne (non facturée)

$$P_l = r \cdot I_e^2$$

$$P_l = r \cdot \left(\frac{P}{U_e \cdot \cos \varphi} \right)^2$$

A puissances P égales, les pertes en lignes sont d'autant plus grandes que $\cos \varphi$ est petit. Une loi impose à toute installation d'avoir un facteur de puissance inférieur à 90% ($\cos \varphi < 0,9$)

3.2 Amélioration du facteur de puissance



Pour que le facteur de puissance $\cos \varphi = 1$ pour l'utilisateur, il faut que i'' et u soient en phase, ou encore que $(i + i')$ et u soient en phase. On recherche la valeur de C telle que cette condition soit réalisée.

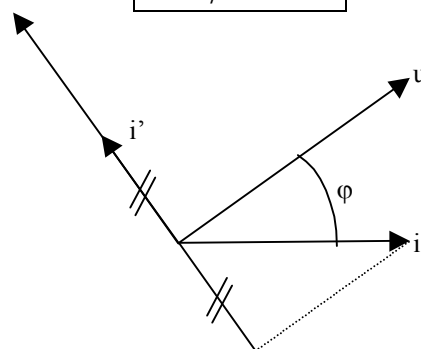
Représentation de Fresnel :

$$i = I \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

$$u = U \cdot \cos(\omega t)$$

$$i' = C \cdot \omega \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{I \cdot \sin \varphi = C \cdot \omega \cdot U}$$



Méthode complexe :

Par définition,

$$\underline{I} = I \cdot e^{-j \cdot \varphi}$$

$$\underline{U} = U$$

$$\underline{I}' = jC\omega U$$

$i + i'$ en phase avec u signifie que $(I + I') \in \mathbb{R}$. Soit

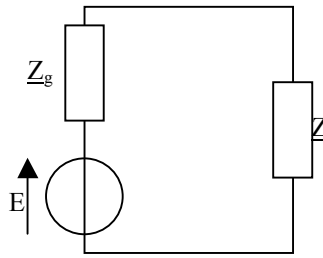
$$I \cdot e^{-j\varphi} + jC\omega U \in \mathbb{R}$$

$$I \cdot \sin \varphi = C \omega U$$

$$\boxed{C = \frac{I \cdot \sin \varphi}{\omega \cdot U}}$$

4 Adaptation d'impédance

Un dipôle passif linéaire est relié à un GBF. On recherche l'impédance de ce dipôle pour laquelle la puissance qu'il dissipe est maximale. Le GBF est modélisé par un générateur de Thévenin $(\underline{E}, \underline{Z}_g)$



On pose

$$\underline{Z}_g = R_g + j.x_g \quad R_g > 0$$

$$\underline{Z} = A + j.B \quad A > 0$$

La source de tension fournit une tension de la forme

$$e = E.\cos(\omega.t)$$

La puissance dissipée dans l'impédance utilisateur est donnée par

$$P = A.I_e^2$$

où $I_e = I / \sqrt{2}$

Or

$$I = \frac{E}{\underline{Z}_g + \underline{Z}} = \frac{E}{(R_g + A) + j.(x_g + B)}$$

$$I = \frac{E}{\sqrt{(R_g + A)^2 + j.(x_g + B)^2}}$$

Soit

$$P = \frac{A}{(R_g + A)^2 + j.(x_g + B)^2} \cdot \frac{E^2}{2}$$

On recherche une puissance P maximum. On cherche les valeurs de A et B indépendantes.

Recherche de B :

$$x_g + B = 0$$

$$B = -x_g$$

Recherche de A :

$$P = \frac{A}{(R_g + A)^2} \cdot \frac{E^2}{2}$$

$$\frac{dP}{dA} = \frac{R_g - A}{(R_g + A)^3} \cdot \frac{E^2}{2}$$

La puissance P est maximum si $A = R_g$.

Remarque :

$$P = \frac{E^2}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{R_g}{\sqrt{A}} + \sqrt{A} \right)^2}$$

Ainsi, P est maximum si $\frac{R_g}{\sqrt{A}} + \sqrt{A}$ est minimum. On cherche donc le minimum de la somme de deux termes dont le produit est constant. Ce résultat est obtenu lorsque les deux termes sont égaux.

Conclusion :

La puissance dissipée dans le dipôle d'impédance Z est maximum si Z et Z_g (impédance du générateur) sont

- de parties imaginaires opposées :

$$B = -x_g$$

- de parties réelles égales :

$$A = R_g$$